(Math. U.)
112

R

U.

F

<36601373500017

<36601373500017

Bayer. Staatsbibliothek

Math Un 112

Matheŝis. Systemata et meth. ord: chronol: 144.

R

Die ersten Gründe der allgemeinen Größenberechnung

als Anhang zum Grundrisse

oder

Ersten Cursus

der

gesammten Mathematik.

von

Johann Friedrich Lorenz.

Helmstädt

bey Carl Gottfried Fleckeisen

1792.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Gegenwärtiger Entwurf der allgemeinen Größenberechnung ist eigentlich und zunächst bestimmt, dem von mir verfaßten Grundrisse der Mathematik zur Ergänzung zu dienen, und mit ihm ein Ganzes auszumachen, welches einen Anfänger in den Stand setzen könne, die Schriften der neuern Mathematiker zu benutzen, und sich durch eigenes Studium in der Wissenschaft vollkommener zu machen. Die 4 ersten Abschnitte sollen die Arithmetik, die 4 mittlern die Geometrie, und die 4 letzten die angewandte Mathematik ergänzen. Es bleibt also dem Gutbefinden des Lehrers frey, entweder den ganzen Grundriß mit seinen Zuhörern erst zu absolviren, und dann den Anhang mit ihnen durchzugehen,

 oder

oder mit jeder Hauptabtheilung des Grundrisses die dazu gehörige Abtheilung des Anhanges unmittelbar zu verbinden. Die Wahl unter beyden beruhet, meines Erachtens, blos auf der Verschiedenheit der jedesmaligen Absichten und Subjecte. Ueberhaupt genommen halte ich es doch für rathsamer, den Anfänger mit den Grundwahrheiten vorher gänzlich bekannt zu machen, ehe man mit ihm zu den Methoden der Neuern, wodurch die weitern Fortschritte so sehr erleichtert werden, übergehet. Wenigstens ist gewiß, daß man sich auf diesem Wege einen viel sicherern Erfolg bey dem letztern versprechen könne. Denn unter einem nur etwas zahlreichen Haufen von Zuhörern, sind oft unter jedem Zehend aufs wenigste sechs, für welche alles, was nach Buchstabenrechnung und Algebra aussiehet, gänzlich in den Wind geredet ist, und für die auch das, was dieses vermeynte Zauberansehen nicht hat, zugleich mit verlohren gehet, wenn der Lehrer beydes mit einander verbindet. Daher bin ich der Meynung, daß eigentlich zweyerley Vorlesungen über die Anfangsgründe der Mathematik gehalten werden müssen, wenn sie nicht größtentheils vergeblich gehalten werden sollen. Hienach wären immer zwey Classen von Zuhörern zu unterscheiden; die erste will tiefer in die Mathematik eindringen, die zweyte aber nicht. Nur

müßte durchaus nicht nach der Vorschrift derjenigen, die so oft in Dingen, wovon sie gar nichts verstehen, vorzuschreiben geneigt sind, der Unterschied für beyde Classen darinnen gesetzt werden, daß die zweyte sich mit einer blos historischen Erkenntniß der Sätze zu begnügen, und nur die erste einen gegründeten Anspruch auf Demonstrationen habe; oder mit andern Worten, daß jene den Beutel, diese das Geld erhalten solle.

Uebrigens habe ich bey Abfassung dieses Anhanges bloß die Absicht gehabt, dem Lehrer einen bequemen Leitfaden zu verschaffen, wonach derselbe die gehörig dazu vorbereitete erste Classe der Zuhörer zu dem Calcul der Neuern anführen könne. Dieses wird mich entschuldigen, daß ich oft so sehr nach Kürze gestrebt, und das, was zur Entwickelung mancher Sätze gehört, blos angedeutet habe. Wenn ich dadurch, wie ich sorgfältig zu verhüten gesucht, nur nicht undeutlich geworden bin: so hoffe ich, daß selbst diese Kürze dem Zwecke des mündlichen Vortrages um so viel besser entsprechen werde.

Zum Ueberflusse gedenke ich noch einer Kleinigkeit: daß die ohne Beysatz citirten §phen und Figuren, auf diesen Anhang und dessen

dessen Kupfertafel sich beziehen; allen übrigen aber, welche im Grundrisse aufzusuchen sind, der Nahme der Wissenschaft, wozu sie gehören, vorgesetzt sey. Geschrieben Kloster Berge bey Magdeburg im April 1792.

Johann Friedrich Lorenz.

Die

Die ersten Gründe der allgemeinen Größenberechnung.

I. Buchstabenrechnung.

§. 1.

Entgegengesetzte Größen sind Größen von einerley Art in solcher Beziehung, daß sie einander ganz oder zum Theil aufheben. Dergleichen sind Einnahme und Ausgabe, Vermögen und Schuld, Vor- und Rückwärts, Auf und Ab.

§. 2. Von zwey entgegengesetzten Größen nenne man die eine, welche man will, bejahend, bejaht oder positiv, die andre verneinend, verneint oder negativ. Erstere bezeichne man mit (+), die andre mit (—), welche aber hier nicht Zeichen der Addition und Subtraction sind.

§. 3. Jede verneinende Größe ist, wie die bejahende, eine wirkliche Größe, und mit ihr von einerley Art §. 1. folglich, wie sie, mehr als Nichts, nur in Beziehung auf die bejahende heißt sie verneinend, d. i. der bejahenden entgegengesetzt, und kann nur in Absicht auf die bejahende (nicht an sich selbst) weniger als nichts genannt werden.

§. 4. Größen mit einerley Zeichen vermehren, mit verschiednen Zeichen vermindern einander. Im ersten Falle erhält man die Summe der Größen mit ihrem gemeinschaftlichen Zeichen; im zweyten Falle die Differenz der beyden Größen mit dem Zeichen der größern; wodurch sich ein zusammengesetzter Ausdruck oft abkürzen läßt. Z. E. $-5-3 = -8$; $-5+3 = -2$. §. 1. 2.

§. 5. Größen addiren heißt, sie zu einander setzen, und den zusammengesetzten Ausdruck, so viel es sich thun läßt, abkürzen. §. 4.

§. 6. Eine Größe bleibt ungeändert, wenn man einerley beliebige Größe mit beyden Zeichen dazu addirt. Z. E. $7+3-3=7$.

§. 7. Größen subtrahiren heißt, die eine von der andern hinwegnehmen; welches allemal geschehen kann, wenn man zuvor den Subtrahendus mit beyden Zeichen zum Minuendus addirt hat. §. 6.

§. 8. Eine Größe wird addirt, wenn man sie mit ihrem Zeichen; subtrahirt, wenn man sie mit dem entgegengesetzten Zeichen beyfügt, d. i. wenn man den Subtrahendus mit entgegengesetzten Zeichen addirt. Z. E.

$$\begin{array}{rrrrl} +12 & -5 & +9 & -4 & = +12 \\ -5 & +8 & +7 & -7 & = +3 \\ \hline +7 & +3 & +16 & -11 & = +15 \text{ Summe} \\ +17 & -13 & +2 & +3 & = +9 \text{ Differenz} \end{array}$$

§. 9. Man setze die Einheit stets bejahend; weil dieses und das Gegentheil auf eins hinaus laufen. Denn bey der bejahenden Einheit sind die verneinenden Zahlen; und bey der verneinenden Einheit die bejahenden, Vielfache des Entgegengesetzten.

§. 10.

§. 10. Bey der Multiplication sowohl, als bey der Division, bringen einerley Zeichen was bejahendes; verschiedne Zeichen was verneinendes hervor, in so fern nämlich die Einheit überall bejahend angenommen wird. §. 9. (Denn setzte man die Einheit verneinend: so entstünde das Gegentheil des Obigen; aber alsdann wären nur die verneinenden und bejahenden Größen verwechselt. §. 2.)

§. 11. Beweis für die Multiplication: So wie die bejahende Einheit in dem einen bejahenden Factor steckt; so steckt auch der zweyte bejahende Factor in dem bejahenden, oder der verneinende in dem verneinenden Producte. Und so wie das Entgegengesetzte der bejahenden Einheit in dem einen verneinenden Factor steckt; so steckt auch das Entgegengesetzte des zweyten bejahenden Factors in dem verneinenden, oder des verneinenden in dem bejahenden Producte. Z. E.

$$\begin{array}{l} +9 - 4 \quad - 8 + 7 = +4 \\ \qquad\qquad +7 - 4 = +3 \\ \hline +63 - 28 - 56 + 49 \\ -36 + 16 + 32 - 28 \\ \hline +27 - 12 - 24 + 21 = +12. \end{array}$$

§. 12. Beweis für die Division: So wie der bejahende Divisor in dem bejahenden Dividendus, oder der verneinende in dem verneinenden steckt; so steckt auch die bejahende Einheit in dem bejahenden Quotienten. Und so wie das Entgegengesetzte des verneinenden Divisors in dem bejahenden Dividendus, oder des bejahenden in dem verneinenden steckt; so steckt auch das Entgegengesetzte der bejahenden Einheit in dem verneinenden Quotienten. Z. E.

$$\frac{+56-35}{+7} = +8-5 \text{ d. i. } \frac{+21}{+7} = +3.$$

§. 13. Hieraus bestimmen sich bey einer Proportion die Zeichen der Glieder; indem die Nahmen der beyden Verhältnisse nicht nur gleiche Größen, sondern auch gleiche Zeichen haben müssen. Von der Verhältniß entgegengesetzter Größen vergleiche man (Arithm. §. 187. Anmerk.)

§. 14. Die Zahlen (ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale), wie auch alle Größen, von welcher Art sie seyn mögen, bezeichne man durch beliebige Buchstaben des Alphabets, und ihre Beziehung auf einander durch die gewöhnlichen arithmetischen Zeichen. Hiedurch erhält man allgemeine Formen:

1. für die Summe: $a+b$
2. für die Differenz: $a-b$
3. für das Product: $a.b$ oder ab
4. für den Quotienten oder Bruch $a:b$ oder $\frac{a}{b}$.

§. 15. Gerade Zahlen sind, worinn die Zahl 2 aufgehet, ungerade, die mit 2 dividirt einen Rest lassen. Für jene ist, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, die allgemeine Form $2n$; für diese $2n \pm 1$ d. i. $2n+1$ oder $2n-1$.

§. 16. Bekannte, wie auch beständige Größen werden durch a, b, c u. s. w., unbekannte aber, wie auch veränderliche, durch z, y, x u. s. w. bezeichnet. Z. E. für die Proportion ist $a:b = x:y$, folglich $ay = bx$, und $y = \frac{bx}{a}$; $x = \frac{ay}{b}$.

§. 17. Auch verbindet man gern Ziffern mit Buchstaben, wie in folgenden Formen:

1. a+

1. $a + a + a = 3a$; allgemein, na.
2. $a . a . a = a^3$; allgemein, a^n.

In dieser Form ist 3, oder allgemein n, ein Exponent; in der vorigen aber nur ein Factor, oder Coefficient.

3. $a : 3a = b : 3b$; allgemein, $a : na = b : nb$.
4. $5a \mp 3a = (5 \mp 3)a$; allgemein $ma \mp na = (m \mp n)a$.

Dieses findet (vermöge Arithm. §. 26.) nur statt, wenn einerley Buchstabe mehr als einmal vorkömmt. Denn zwey verschiedne Buchstaben lassen sich ohne weitere Bestimmung nicht mit einander vergleichen, und werden blos zu einander gesetzt. Z. E. $7a \mp 4b$.

5. $3a . 2b = 6ab$; allgemein $ma . nb = mnab$.
6. $\frac{6ab}{3a} = 2b$; allgemein $\frac{mnab}{ma} = nb$.

§. 18. Die Rechnung mit Potenzen giebt folgende Formen:

1. $a^2 . a^3 = a^5$; allgemein, $a^m . a^n = a^{m+n}$.
2. $(a^3)^2 = a^3 . a^3 = a^6$; allgemein, $(a^m)^n = a^{mn}$.
3. $(ab)^2 = ab . ab = a^2 b^2$; allgemein, $(ab)^m = a^m b^m$.
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} . \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, allgemein, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.
5. $\frac{a^5}{a^2} = \frac{a^2 . a^3}{a^2} = a^3$; allgemein, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

$$\frac{a^5}{a^5}=a^{5-5}=a^0=1;\quad \frac{a^2}{a^5}=a^{2-5}=a^{-3}=\frac{a^2}{a^3a^2}$$

$$=\frac{1}{a^3}.$$

Allgemein ist also $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, welches auch das Entgegengesetzte von $a^n=1.a^n$ ist. Ein andrer Begrif solcher Formen wird bey der Zusammensetzung der Verhältnisse vorkommen.

§. 19. Die Formen in §. 18. gelten auch für verneinende Exponenten. Denn

1. $a^m.a^{-n}=a^m.\frac{1}{a^n}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; und

$$a^{-m}.a^{-n}=\frac{1}{a^m}.\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-(m+n)}$$

2. $(a^{-m})^n=\left(\frac{1}{a^m}\right)^n=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$; und

$$(a^m)^{-n}=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$$

3. $\frac{a^m}{a^{-n}}=a^m:\frac{1}{a^n}=a^m a^n=a^{m+n}$; und

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}}=\frac{1}{a^m}:\frac{1}{a^n}=\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m};\text{ und}$$

$$\frac{a^{-m}}{a^n}=\frac{1}{a^m}.\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-(m+n)}.$$

§. 20. Eine durch das Bejahungs- oder Verneinungszeichen §. 2. bezeichnete Größe heißt einfach, mononomisch; eine aus mehrern einfachen zusammengesetzte Größe, vieltheilig, polynomisch. Die einfachen Größen heißen ihre Nahmen, oder Glie-

Glieder, termini; nach deren Anzahl sie 2. 3. 4theilig, binomisch, trinomisch, tetranomisch u. s. w. ist. Beym ersten Gliede einer vieltheiligen Größe wird das Bejahungszeichen weggelassen.

---

§. 21. Eine vieltheilige Größe, die verschiedne Potenzen von einerley Buchstaben enthält, wird nach solchem Buchstaben geordnet, wenn man die Glieder so auf einander folgen läßt, wie die Exponenten der Potenzen ab- oder zunehmen. Z. E. $x^3 + ax^2 + bx - c$. Ist einer der Coefficienten z. E. $a = 0$, so fällt dies Glied hinweg, und wird mit (*) bezeichnet, $x^3 * + bx - c$.

§. 22. Die Summe oder Differenz vieltheiliger Größen erhält man, wenn man die Glieder, die einerley Buchstaben enthalten, unter einander schreibt, und nach §. 8. 17. verfährt. Z. E.

$$\begin{array}{llllll}
A & = 15a - 17b & + 4c & - 7d & + 5e & \\
B & = 6a - 19b & - 7c & + 3d & & - 9f \\
\hline
A + B & = 21a - 36b & - 3c & - 4d & + 5e & - 9f. \\
A - B & = 9a + 2b & + 11c & - 10d & + 5e & + 9f.
\end{array}$$

§. 23. Die Operation §. 22. bleibt dieselbe, wenn auch die Buchstaben Producte, Quotienten, Potenzen, Wurzeln, und was auch für Zahlen, ja was auch für Größen bedeuten. Z. E. von a, b, c, d, kann man jeden eine bestimmte Einheit, z. E. Centner, Pfunde, Lothe, Quentlein; oder Thaler, Groschen, Pfennige, Heller, gelten lassen, und sich dadurch selbst in gemeinen Rechnungen eine mühsame Reduction ersparen.

§. 24. Das Product aus vieltheiligen Größen erhält man, wenn man den Multiplicandus mit jedem Theile des Multiplicans nach §. 10. 17—19

multiplicirt, und die gefundnen Producte nach §. 22 addirt. Z. E.

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 10 = A$$
$$x^2 + 2x - 9 = B = a + b + c$$

$$x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 = A.a$$
$$+ 2x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 20x = A.b$$
$$- 9x^3 + 18x^2 - 45x + 90 = A.c$$

$$x^5 \; * \; - 8x^3 + 18x^2 - 65x + 90 = A.B$$

§. 25. Den Quotienten aus vieltheiligen Größen erhält man, wenn man Divisor und Dividendus auf einerley Art ordnet § 21. und nach Art der gemeinen Division in Decimalziffern die einzelnen Theile des Quotienten nach §. 10. 17—19. 22 aufsucht. Hierin üben sich Anfänger am besten an Producten, die sie aus beliebig erwählten Factoren nach §. 24 gefunden haben, welches zugleich zur Probe dient. Z. E.

Divisor	Quotient
$x^2 + 2x - 9$	$x^3 - 2x^2 + 5x - 10$

Dividendus

$$x^5 \; * \; - 8x^3 + 18x^2 - 65x + 90$$
$$x^5 + 2x^4 - 9x^3$$

$$- 2x^4 + x^3 + 18x^2 - 65x + 90$$
$$- 2x^4 - 4x^3 + 18x^2$$

$$+ 5x^3 \quad - 65x + 90$$
$$+ 5x^3 + 10x^2 - 45x$$

$$- 10x^2 - 20x + 90$$
$$- 10x^2 - 20x + 90$$

$$0$$

§. 26. Bleibt bey der Division zuletzt ein Rest, so füge man dem gefundnen Quotienten einen Bruch

bey,

bey, dessen Zähler der Rest, und dessen Nenner der Divisor ist. Z. E. $(a^3+b^3+c):(a+b) = a^2-ab+b^2+\frac{c}{a+b}$; wo der angehängte Bruch auch durch $c.\frac{1}{a+b}$ oder $ac.\frac{1}{1+\frac{b}{a}}$ ausgedrückt, und durch fortgesetzte Division aufgelößt werden kann; da dann $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}$ u. s. w. und $\frac{1}{1+\frac{b}{a}} = 1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}$ u. s. w. gefunden wird.

§. 27. Es stehet jederzeit frey, in den beyden Factoren eines Products oder in den beyden Gliedern eines Bruchs alle vorhandnen Zeichen in die entgegengesetzten zu verwandeln. Denn nach §. 10. ist $+(a-b).+(-c+d) = -(a-b).-(-c+d)$ und $\frac{+(a-b)}{+(-c+d)} = \frac{-(a-b)}{-(-c+d)}$.

§. 28. Die bisherigen Rechnungen lassen sich mit Vortheil an der Bruchrechnung üben. Z. E. $a+\frac{bd}{c} = \frac{ac+bd}{c}$; $a+\frac{ac-cd-ad}{c+d} = \frac{2ac-cd}{c+d}$; $\frac{a^2}{a-b}-a = \frac{ab}{a-b}$; $\frac{a^2}{a-b}+a = \frac{2a^2-ab}{a-b}$; $a+b-\frac{cd}{a} = \frac{a^2+ab-cd}{a}$; $a-b+\frac{c^2}{a-b} = \frac{a^2-2ab+b^2+c^2}{a-b}$; $a-b+\frac{b^2}{a+b} = \frac{a^2}{a+b}$;

$a - b - \frac{b^2}{a+b} = \frac{a^2 - 2b^2}{a+b}$; $\frac{a^3}{bc} + \frac{fg}{bn} = \frac{a^3 h + cfg}{bch}$ u. s. w.

§. 29. Durch Hülfe der gemeinen Buchstabenrechnung kann man sich selbst nützliche Lehrsätze erfinden, wovon einige Beyspiele hier folgen.

§. 30. Es sey $a > b$, $S = a + b$, und $D = a - b$: so ist $a = \frac{S+D}{2}$, und $b = \frac{S-D}{2}$.

§. 31. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

§. 32. $(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

§. 33. Soll man $(c+d+e)^2$ machen: so setze man $c + d = a$, und $e = b$; da dann $(c+d+e)^2 = (c+d)^2 + 2(c+d)e + e^2$. So siehet man leicht, daß auf eben die Art aus dem Quadrate der 3theiligen Wurzel das Quadrat der 4theiligen, und allgemein aus dem Quadrate der ntheiligen, das Quadrat der $n + 1$ theiligen gefunden werde.

§. 34. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3$.

§. 35. Auf ähnliche Art wie §. 33. ist $(c+d+e)^3 = (c+d)^3 + 3(c+d)^2 e + 3e^2(c+d) + e^3$ u. s. w.

§. 36. Es sey eine vieltheilige Größe:

$$hx^n \ldots + dx^3 + cx^2 + bx^1 + ax^0 + bx^{-1} + cx^{-2} + dx^{-3} \ldots + hx^{-n}$$

und

und man lasse den Buchstaben x die Zahl 10, die Coeffiienten aber beliebige Zahlen, jedoch noch unter 10 bedeuten: so erkennt man daran gar bald das Gesetz des gemeinen Zahlensystems, wovon also diese Größe eine allgemeine Form ist. Da man aber x auch jede andere Zahl, und die Coefficienten beliebige Zahlen, jedoch noch unter dieser, bedeuten lassen kann: so erkennt man an ihr die Form eines allgemeinen Zahlensystems. Hienach gäbe z. E. $x=2$ die Diadik; $x=4$ die Tetractik; $x=10$ die Decadik, oder das Decimalsystem; $x=12$ das Duodecimalsystem; $x=60$ das Sexagenalsystem u. s. w. Die Rechnungsarten mit Größen aus dem allgemeinen Zahlensystem, und ihre Anwendungen auf jedes bestimmte System, lassen sich aus dem Bisherigen leicht herleiten. Hier nur ein Exempel zu §. 32 bis 35 gehörig:

Sind die Glieder einer vieltheiligen Wurzel Decimalziffern von unmittelbar auf einander folgenden Ordnungen m, m—1, m—2, m—3 u. s. w. so kann man sie nach einander in 2 Theile u. s. w. von der Ordnung n und n—1 eintheilen; da dann

1) $(p.10^n+q.10^{n-1})^2=p^2.10^{2n}+2pq.10^{2n-1}+q^2.10^{2n-2}$

2) $(p.10^n+q.10^{n-1})^3=p^3.10^{3n}+3p^2q.10^{3n-1}+3p.q^2.10^{3n-2}+q^3.10^{3n-3}$.

§. 37. Die Rechnung mit Wurzeln giebt folgende Formen, worin n, m, ganze Zahlen bedeuten sollen:

1. $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$, weil $(a^{\frac{1}{3}})^3=a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ $=a^{\frac{3}{3}}=a^1=a=(\sqrt[3]{a})^3$; allgemein $\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$, weil $\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^m=x^{\frac{nm}{m}}=x^n$.

In

In der Form $x^{\frac{n}{m}}$ bedeutet demnach der Bruchexponent blos, daß man x in die nte Potenz erheben, und aus dieser die mte Wurzel ziehen solle; oder welches einerley ist, daß man aus x die mte Wurzel ziehen, und diese in die nte Potenz erheben solle. Z. E. $6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(6^2)} = \sqrt[3]{36}$. Eine andere Bedeutung dieser Form wird bey der Zusammensetzung der Verhältnisse vorkommen.

2. $\sqrt[n]{(ab)} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$, weil $(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b})^n = ab$. Z. E. $\sqrt{15} = \sqrt{(5.3)} = \sqrt{5}.\sqrt{3}$, und $\sqrt{28} = \sqrt{(4.7)} = \sqrt{4}.\sqrt{7}. = 2.\sqrt{7}$. Daher ist z. E. $\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{9.2} + \sqrt{4.2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{5^2}.\sqrt{2} = \sqrt{50}$.

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, weil $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$. Z. E.

$\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\tfrac{12}{4}} : \sqrt[3]{3}$.

4. $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}$, z. E. $\sqrt[3]{(\sqrt{7})} = \sqrt{(\sqrt[3]{7})} = \sqrt[6]{7}$.

5. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n:r}{m:r}} = \sqrt[m:r]{a^{n:r}}$.

z. E. $\sqrt[6]{7^3} = \sqrt{7}$.

6. $\sqrt[m]{a^n}.\sqrt[r]{a^u} = a^{\frac{n}{m}}.a^{\frac{u}{r}} = a^{\frac{nr+mu}{mr}} = \sqrt[mr]{a^{nr+mu}}$.

7. $\sqrt[m]{}$

7. $\sqrt[m]{a^n} : \sqrt[r]{a^u} = a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{u}{r}} = a^{\frac{nr-mu}{mr}} =$
$\sqrt[mr]{a^{nr-mu}}$.

§. 38. Hieraus erhellet zugleich, daß die Formen §. 18. 19. auch für Bruchexponenten gelten.

§. 39. Lehrsatz. Von jeder bejahenden Zahl sind alle gerade sowohl als ungerade Potenzen bejaht; von jeder verneinten aber alle gerade bejaht, alle ungerade verneint.

Beweis: 1.) $(\mp a)^2 = + a^2$. 2.) $(\mp a)^{2n} = (\mp a)^{2 \cdot n} = (+ a^2)^n$. 3.) $(\mp a)^{2n+1} = \mp a (+ a^2)^n$.

§. 40. Zusätze: 1) Jede gerade Wurzel aus einer bejahten Zahl ist sowohl bejaht, als verneint. Z. E. $\sqrt{+ a^2} = \mp a$. 2) Jede ungerade Wurzel aus einer bejahten Zahl kann nur bejaht; aus einer verneinten, nur verneint seyn. Z. E. $\sqrt[3]{+ a^3} = + a$; $\sqrt[3]{- a^3} = - a$. 3) Jeder Ausdruck, $\sqrt[2n]{- a}$, der die gerade Wurzel aus einer verneinten Zahl fodert, heißt eine unmögliche, oder eingebildete Größe, quantitas impossibilis, imaginaria; im Gegensatz einer möglichen oder reellen, possibilis, realis. 4) Da $\sqrt[2n]{- a} = - a^{\frac{1}{2n}} = - a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{(\sqrt[n]{- a})}$; wo das in Klammern eingeschlossene entweder eine unmögliche oder eine mögliche verneinte Größe, nachdem n gerade oder ungerade, ist: so kann man jede unmögliche Größe auch als die Quadratwurzel aus einer möglichen verneinten Größe, z. E. $\sqrt{- x}$, ansehen; da dann ihr Quadrat diese verneinte Größe $- x$ selbst ist. Zwar ist $(\sqrt{- x})^2 = \sqrt{- x} \cdot \sqrt{- x}$
$= \sqrt{}$

$=\sqrt{+x^2}=\mp x$; aber man muß hier $-x$ nehmen. Das Quadrat einer unmöglichen Größe kann also möglich, so wie das Quadrat einer Irrationalgröße rational seyn. Die unmöglichen Größen, so wie die irrationalen, werden daher mit Recht von den Mathematikern in Betracht genommen. Auch ist obiger Fall selbst dem gemeinen Begriffe der Multiplication gemäß; indem die reelle Einheit in dem einen unmöglichen Factor eben so steckt, als der andere unmögliche Factor in dem reellen Producte. (Vergl. §. 11.)

II.

Logarithmische Rechnung.

1. Die arithm. und geometr. Verhältnisse, Proportionen und Progressionen.

§. 41.

Man betrachtet die arithmetische Verhältniß (ratio arithmetica) zweyer Zahlen, wenn man auf deren Differenz siehet. Diese heißt der Nahme solcher Verhältniß. Zwey gleiche arithmetische Verhältnisse, d. i. die gleiche Nahmen haben, machen eine arithmetische Proportion (proportio arithmetica) z. E. $3 - 5 = 6 - 8$.

§. 42. Hievon ist also die geometrische Verhältniß und Proportion (Ar. §. 141. 146.), die auch schlechthin Verhältniß und Proportion heißt, wohl zu unterscheiden. Z. E. $3 : 6 = 4 : 8$.

§. 43.

§. 43. Die allgemeine Form für die geometrische Proportion ist $a : ma = b : mb$ (Arithm. §. 151) und für die stetige $a : ma = ma : m^2a$, oder $\div a . ma . m^2a$. (Ar. §. 148.) Die allgemeine Form für die arithmetische Proportion ist $a - (a + d) = b - (b + d)$ §. 41. und für die stetige $a - (a+d) = (a+d) - (a + 2d)$ oder $\div a . a + d . a + 2d$.

§. 44. Sind die Hinterglieder (Ar. §. 142.) kleiner als die Vorderglieder: so ist bey der geometrischen Verhältniß der Nahme m ein ächter Bruch; bey der arithmetischen der Nahme d verneint.

§. 45. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden äußern Glieder (Ar. §. 147.) der Summe der beyden mittlern gleich.

Denn in der allgemeinen Form §. 43. sind obgenannte Summen $a + (b + d)$ und $(a + d) + b$, folglich einander gleich.

§. 46. In der stetigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder dem mittelsten doppelt genommen gleich.

Denn es ist $2a + 2d = 2 (a + d)$

§. 47. Zwischen jeden zwey gegebenen Zahlen findet man daher die mittlere arithmetische Proportionalzahl, oder das arithmetische Mittel, wenn man die Summe der beyden Zahlen halbirt.

Denn es ist $\frac{2a + 2d}{2} = a + d$.

§. 48. Eine Reihe, series, heißt eine Menge von Größen (Gliedern der Reihe) deren jede nach einem allen gemeinschaftlichen Gesetze bestimmt wird; insbe-

insbesondre eine arithmetische Reihe oder Progression, series seu progressio arithmetica, deren Glieder alle in gleichen zusammenhangenden arithmetischen Verhältnissen fortgehen. Von letzterer ist die allgemeine Form: ÷ a . a + d . a + 2d . a + 3d . . . . a + (n — 1) d.

§. 49. Die Reihe steigt oder fällt, series adscendens oder descendens, nachdem die Glieder zu- oder abnehmen; da dann für die fallende d verneint ist.

§. 50. Setzt man im §. 48. a = 0: so erhält man ÷ 0 . d . 2d . 3d . . . . . (n — 1) d, wo d jede Zahl, auch die Einheit bedeuten kann.

§. 51. Die Eigenschaften der geometrischen Proportion sind im 4ten Cap. der Arithm. abgehandelt; können aber auch, und noch bequemer, aus der allgemeinen Form §. 43. hergeleitet werden, worüber ein einziges Beyspiel (Ar. §. 169) hinreichend belehren kann. Da nämlich

$a : ma = b : mb$, so ist

1) $a + b : ma + mb = a : ma$; weil $ma + mb = m(a + b)$.

2) $a + ma : b + mb = a : b$; weil $a + ma = (1 + m)^a$, und $b + mb = (1 + m)^b$.

§. 52. Mehrere Zahlen, die alle in gleichen zusammenhangenden geometrischen Verhältnissen fortgehen, machen eine geometrische Progression oder Reihe, series seu progressio geometrica, deren allgemeine Form ist:

$\div\!\!\div a . ma . m^2a . m^3a . . . . m^{n-1}a.$

§. 53. Soll die Reihe fallen §. 49. so muß m ein ächter Bruch seyn.

§. 54.

§. 54. Dividirt man die Reihe §. 52. mit dem ersten Gliede a: so erhält man eine Reihe, die in eben der vorigen Verhältniß (der Grundverhältniß) fortgehet (Ar. §. 157.) und 1 oder m^0 zum ersten Gliede hat, folglich lauter Potenzen von m enthält, und die einfachste Form einer geometrischen Reihe giebt:

$$\div\, m^0 . m^1 . m^2 . m^3 . \ldots\ldots . m^{n-1}.$$

§. 55. Die Exponenten der Glieder in §. 54. sind die natürlichen Zahlen.

Denn ist n eine ganze Zahl, und irgend ein Glied in §. 54. $= m^n$: so muß das nächstfolgende Glied $= m^{n+1}$ seyn; weil $1 : m = m^n : m^{n+1}$.

2. Die Zusammensetzung der Verhältnisse, und die Logarithmen.

§. 56. Vergleicht man mittelst der Division eine Zahl a mit einer zweyten b, diese mit einer dritten c u. s. w. so sagt man: die Verhältniß der ersten Zahl zur letzten sey aus allen den einzelnen Verhältnissen zusammengesetzt, oder in dieselben zerlegt. Z. E. für a, b, c ist $a : c = (a : b) + (b . c)$.

§. 57. **Lehrsatz.** Die Verhältniß zweyer Producte ac, bd, ist aus den Verhältnissen ihrer Factoren $(a : b) + (c : d)$ zusammengesetzt.

Beweis. Es sey $c : d = b : e$ (Ar. §. 153.) Nun ist auch $a : b = a : b$. Folglich ist $ac : bd = a : e$ (Ar. §. 175) $= (a : b) + (b : e)$ §. 56. $= (a : b) + (c : d)$

§. 58. Die Verhältniß der Gleichheit (Ar. §. 145) c : c, oder 1 : 1, macht bey Zusammensetzung der Verhältnisse keine Veränderung; und ist also

hier als Null anzusehen. Denn es ist (a:b) + (c:c) = ac:bc = a:b.

§. 59. Da die gerade Verhältniß a:b, mit ihrer umgekehrten b:a (Ar. §. 144.) zusammengesetzt, eine Verhältniß der Gleichheit giebt, nämlich (a:b) + (b:a) = ab:ab = 1:1, so sind dergleichen Verhältnisse in der Zusammensetzung als Null anzusehen, und heben also einander auf, sind folglich einander entgegengesetzt §. 1. oder jede derselben ist die Verneinung der andern. Nennt man daher die gerade Verhältniß bejaht (+), so muß die umgekehrte verneint (—) heißen.

§. 60. Sind die einzelnen Verhältnisse alle einander gleich: so heißt jede derselben ein aliquoter Theil der daraus zusammengesetzten, und diese ein Vielfaches eines solchen Theils. Es sey z. E. a:b = c:d = e:f u. s. w. so ist m:n = (a+b) + (c:d) = (a:b) + (a:b) = 2 (a:b) das zweyfache der (a:b) und diese die Hälfte der (m:n). Auf eben die Art ist p:q = (a:b) + (c:d) + (e:f) = 3 (a:b) u. s. w.

§. 61. Hiebey ist das Vielfache der Verhältniß von der vielfachen Verhältniß wohl zu unterscheiden. Im Lateinischen sagt man hier ratio multiplicata, nicht multipla; und insbesondere duplicata, triplicata; subduplicata, subtriplicata; nicht aber dupla, tripla; subdupla, subtripla u. s. w.

§. 62. In einer geometrischen Reihe §. 52. ∺ a . b . c . d . e . f . . . . ist daher a:c = 2 (a:b); a:d = 3 (a:b), a:e = 4 (a:b) u. s. w. und wiederum a:b = $\frac{1}{2}$ (a:c) = $\frac{1}{3}$ (a:d) = $\frac{1}{4}$ (a:e) u. s. w. Diese Zahlen, welche das Vielfache, oder den Theil einer Verhältniß anzeigen, können die Exponenten

solcher

solcher Verhältniß genannt werden, (vergl. Arithm. §. 143. Anm.)

§. 63. Fängt sich solche Reihe, wie §. 54, mit der Einheit an: so ist $1 : m^n = n\,(1 : m)$, und n der Exponent der Verhältniß $1 : m^n$. Zwar nennt man nach (Ar. §. 107.) die natürlichen Zahlen in den Gliedern §. 54. die Exponenten dieser Glieder. Da aber bey jeder Zahl die Einheit zum Grunde liegt, (Ar. §. 15. 16.) und eine Zahl nichts anders, als die Verhältniß der Menge zur Einheit ist: so sagt der Ausdruck im Grunde dasselbe, weil man sich bey jeder Zahl m^n die Verhältniß $1 : m^n$ gedenkt; und es wird hier nur der Begrif des Exponenten (Ar. §. 107.) näher bestimmt, und wie die Folge lehren wird, allgemeiner gemacht.

§. 64. Setzt man die Grundverhältniß §. 54. $1 : a$, etwa $1 : 2$, und schreibt hienach

N) ÷ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256.....
M) ÷ a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. a^8......
L) ÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8....

so heißt jede Zahl in der Reihe L, der Logarithmus (die Verhältnißzahl, λογων αριθμος) der über ihr stehenden Zahl in N, in der Bedeutung §. 63; weil sie von der Verhältniß der Einheit zu solcher Zahl in N anzeigt, wie vielmal die Grundverhältniß $(1 : 2)$ darin enthalten sey. Z. E. $7 = \log. 128$, weil 7 anzeigt, daß $1 : 128 = 7\,(1 : 2)$ und allgemein $1 : a^7 = 7\,(1 : a)$ sey.

§. 65. Jede Zahl in N ist bestimmt, sobald a in M bestimmt ist, und jeder verschiedne Werth von a, giebt verschiedne Zahlen in N. Daher heißt a die Grundzahl, deren Bestimmung ein logarithmisches System giebt. Man kann aber jeder

Grundverhältniß m:n die Form 1:a geben; weil $m:n = \frac{m}{m} : \frac{n}{m} = 1 : \frac{n}{m}$, wo $a = \frac{n}{m}$.

§. 66. In jedem logarithmischen System ist Null der Logarithmus der Einheit, und die Einheit der Logarithmus der Grundzahl; weil 1:1 die Verhältniß der Gleichheit, folglich als Null anzusehen ist, §. 58. und 1:a = 1 (1:a) d. i. weil die Grundverhältniß 1:a bey 1:1 nullmahl, bey $1:a^1$ einmahl, so wie bey $1:a^2$ zweymahl u. s. w. genommen ist.

§. 67. Man kann zum Logarithmus der Grundzahl eine Größe P, welche man will (eine Zahl oder eine Linie, Fläche ꝛc.) annehmen, und diese Größe P mit den Zahlen in L §. 64. multipliciren, ohne daß dadurch die einmahl angenommene Analogie im geringsten verändert werde. Nimmt man nun für P eine Zahl: so werden auch alle Logarithmen Zahlen, und heißen in eigentlichster Bedeutung des Worts Logarithmen, Zahlen der Verhältnisse, λόγων ἀριθμοι. Setzt man P = + 1, so bleibt die Reihe L in §. 64. unverändert; setzt man P = − 1, so bleiben die Zahlen in L auch, würden aber verneint.

§. 68. Lehrsatz. Man findet den Logarithmus 1) eines Products, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt; 2) eines Quotienten, oder Bruchs, wenn man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt; 3) einer Potenz, wenn man den Logarithmus der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt; 4) einer Wurzel, wenn man den Logarithmus der Potenz mit dem Exponenten der Wurzel dividirt.

Beweis

Beweis. 1) log. pq ist eigentlich log. (1 : pq). Nun ist 1 : pq = (1 : p) + (1 : q). Folglich ist log. (1 : pq) = log. (1 : p) + log. (1 : q) oder log. pq = log. p + log. q.

2) $\log.\frac{n}{m} = \log.\left(1 : \frac{n}{m}\right)$. Aber $1 - \frac{n}{m} =$ (1 : n) + (m : 1). Folglich $\log.\left(1 : \frac{n}{m}\right) = \log.$ (1 : n) + log. (m : 1) = log. (1 : n) — log. (1 : m) §. 59. oder $\log.\frac{n}{m} = \log. n - \log. m$.

3) $\log. a^3 = \log. (1 : a^3)$. Aber $1 : a^3 = (1 : a) + (1 : a) + (1 : a) = 3\,(1 : a)$. Folglich $\log. (1 : a^3) = \log. (1 : a) + \log. (1 : a) + \log. (1 : a) = 3 \log. (1 : a)$ oder $\log. a^3 = 3 \log. a$.

4) Folglich auch $\frac{1}{3} \log. a^3 = \log. a$. Letzteres wird durch das nun folgende noch weiter entwickelt.

§. 69. Die nte Wurzel aus einer Zahl S, ist die erste von n—1 mittlern Proportionalzahlen zwischen 1 und S. Z. E. Wenn ∺ 1 . p . q . r . S; so ist $p = \sqrt[4]{S}$.

Denn $1 : S = 1^4 : p^4$ (Ar. §. 180). Nun ist $1 = 1^4$. Folglich ist auch $S = p^4$, folglich $\sqrt[4]{S} = p$.

§. 70. Durch Einschaltung, interpolatio, der 3 mittlern Glieder wird die Verhältniß 1 : S in 4 gleiche Verhältnisse getheilt 1 : p = p : q = q : r = r : S; daß also jede derselben der vierte Theil der ganzen Verhältniß 1 : S, folglich $(1 : p) = \frac{1}{4}$, $1 : q = \frac{2}{4}$, $1 : r = \frac{3}{4}$, $1 : S = \frac{4}{4}\,(1 : S)$ sey, und man nach Art der bisherigen Bezeichnung setzen könne:

$\div 1 . S^{\frac{1}{4}} . S^{\frac{2}{4}} . S^{\frac{3}{4}} . S^{1}$, folglich $\sqrt[4]{S^1} = S^{\frac{1}{4}}$ §. 69.

§. 71. Hieraus erhellet die eigentliche Bedeutung der gebrochnen Exponenten §. 37. daß sie die Theilung einer Verhältniß 1 : S anzeigen; wenn man nämlich zwischen 1 und S Glieder einschiebt, und dadurch die Verhältniß 1 : S in Theile zerlegt. Wäre z. E. M in §. 64 $\div a^0 . a^2 . a^4 . a^6$, so ist $a^2 = \sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}}$, und man erhält den Logarithmus 2 der Cubikwurzel aus der Zahl a^6, wenn man den Logarithmus 6 dieser Zahl mit dem Exponenten 3 der Wurzel dividirt (vergl. §. 68).

§. 72. Wäre aus §. 64. $a^8 = 256$ gegeben: so findet man die Zwischenglieder der Verhältniß 1 : 256, und deren Logarithmen, auf folgende Art:

Man suche zwischen 1 und 256 die mittlere geometrische, und zwischen 0 und 8 die mittlere arithmetische Proportionalzahl: so erhält man $\div 1 . 16 . 256$ und $\div a^0 . a^4 . a^8$. Mit 1 : 16 und 16 : 256 mache man es auf eben die Art; so erhält man $\div 1 . 4 . 16 . 64 . 256$. und $a^0 . a^2 . a^4 . a^6 . a^8$. Hiemit wiederhohle man obige Operation: so erhält man die Reihe M in §. 64.

§. 73. Auf eben die Art §. 72. findet man auch für zwey unmittelbar auf einander folgende Glieder a^m und a^{m+1} der Reihe M in §. 64. mittlere Proportionalzahlen von beliebiger Menge und deren Logarithmen. So ist z. E. eine mittlere

$$p = \sqrt{(a^m . a^{m+1})} = \sqrt{a^{2m+1}} = a^{\frac{2m+1}{2}},$$

daß also diese p und deren Logarithmus $\frac{2m+1}{2}$ gefunden

funden ist, und man erhalten hat $\div\div a^m . a^{\frac{2m+1}{2}} a^{m+1}$. Setzt man diese Arbeit immer weiter fort: so erhält man eine unzählige Menge mittlerer Proportionalzahlen zwischen a^m und a^{m+1} und deren Logarithmen. Unter diesen müssen nothwendig auch die ganzen Zahlen seyn, die zwischen a^n und a^{m+1} fallen, deren Logarithmen also hiedurch gefunden werden.

§. 74. Da alle Verhältnisse in der Reihe M §. 64. gleich sind: so ist die Theilung der einen zugleich die Theilung einer jeden der übrigen; und man erhält hiedurch eine Reihe von unzählig vielen Gliedern, und deren Logarithmen, wovon eben das gilt, was von der Reihe M §. 68. erwiesen worden.

§. 75. Setzt man die Reihe N, M, L in §. 64. rückwärts fort:

$$\ldots \tfrac{1}{16} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 .\ 2 .\ 4 \ldots\ldots \quad N$$
$$\ldots a\tfrac{1}{4} \cdot a\tfrac{1}{3} \cdot a\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{a} \cdot a^0 . a^1 . a^2 \ldots\ldots \quad M$$
$$\ldots -4 . -3 . -2 . -1 .\ 0 .\ 1 .\ 2 \ldots\ldots \quad L$$

so werden die Exponenten von a, also die Zahlen in L negativ; weil die Verhältniß $1 : \frac{1}{a}$ d. i. $a : 1$ die umgekehrte von $1 : a$, also ihr entgegengesetzt ist. §. 59.

§. 76. Ist die Grundzahl $a > 1$: so sind alle Zahlen rechter Hand ganze, und alle Zahlen linker Hand ächte Brüche, deren Logarithmen also einerley, nur einander entgegengesetzt sind, so daß diese negativ werden, wenn man jene positiv nennt.

§. 77. Hieraus wird die Bedeutung der negativen Exponenten §. 18. näher bestimmt; indem sie die Vervielfältigung oder Theilung der umgekehrten

Verhältnisse an[zei]gen. Es ist nämlich $a^{-m} = m$ $(a : 1)$ wenn a^m [=] $m (1 : a)$ ist.

§. 78. Uebrigens siehet man aus dem bisherigen leicht ein, daß die Verhältnisse, die aus einerley Grundverhältniß $1 : a$ hergeleitet sind, sie mögen positive oder negative Exponenten, oder beyde haben, nach einerley Regel verbunden und getheilt werden müssen.

3. Die Tafeln der gemeinen Logarithmen, und deren Gebrauch.

§. 79. Das gemeine logarithmische System (das Briggisch-Vlacqische) ist, worinn die Grundzahl $a = 10$ angenommen worden. Man setzte nämlich

∺ 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000.
÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5.

und berechnete nach §. 73. die Logarithmen aller ganzen Zahlen, die zwischen die Glieder obiger Reihe fallen; doch war diese mühsame Rechnung nur für die einfachen oder Primzahlen (d. i. worinn keine von ihnen verschiedene Zahl aufgehet; dergleichen 2, 3, 7, 11, 13 u. s. w.) nöthig, aus denen sich die Logarithmen für die übrigen (zusammengesetzten) Zahlen nach §. 68. bestimmen lassen. Z. E. $\log. 4 = 2 \log. 2$; $\log. 5 = \log. \frac{10}{2} = \log. 10 - \log. 2$ u. s. w.

§. 80. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 sind > 0 und < 1, derer zwischen 10 und 100 > 1 und < 2 u. s. w. Da man sie nun durch Decimalzahlen anzeigt: so besteht jeder aus einer ganzen Zahl und einem Decimalbruche, wovon jene die Kennziffer, oder Charakteristik heißt, (weil sie anzeigt

anzeigt, zwischen welche Glieder der Reihen in §. 79 die Zahl und ihr Logarithmus falle) dieser aber die Mantissa genannt wird.

§. 81. Die kleinern Tafeln gehen bis zu der Zahl 10000, und enthalten nur 7 Stellen der Mantissa; die größern gehen bis zu 100000 und drüber, oder geben zum Theil mehr als 7 Stellen der Mantissa an. In beyden wird die letzte Ziffer um 1 vermehrt, wenn das weggelassene mehr als $\frac{1}{2}$ der letztern beträgt.

§. 82. Man muß auf das weggelassene Rücksicht nehmen, wenn ein Logarithmus von einem andern, dessen Mantissa aus lauter Nullen bestehet, zu subtrahiren ist; daß man nämlich die niedrigste Ziffer der Differenz um 1 vermindert. Ueberhaupt muß man nicht vergessen, daß man nur mit Stükken der Logarithmen rechnet, folglich eine ganz vollständige Genauigkeit in allen Fällen nicht fordern darf. Je größer die Genauigkeit seyn soll, desto mehr sind größere Tafeln nothwendig.

§. 83. Ist $\log. r = l$: so ist $\log. (r.10^n) = \log. r + n \log. 10 = l + n$. Ist $\log. R = L$: so ist $\log. \frac{R}{10^n} = \log. R - n \log. 10 = L - n$; wo $\mp n$ zur Characteristik zu rechnen ist. Z. E. $\log. 9 = 0,9542425$ und $\log. 9000 = 3,9542425$.

§. 84. Man kann $\mp n$ entweder wirklich mit der Characteristik des Logarithmus zusammenrechnen, oder, welches oft bequemer ist, dem Logarithmus nur anhängen, um dadurch anzudeuten, daß obige Zusammenrechnung geschehen solle. Z. E. $C + M \mp n$, wo C die Characteristik, M die Man-

tissa bedeutet, und n zu C addirt, oder davon subtrahirt werden soll. Bey dieser Bezeichnungsart kann man auch die Characteristik beliebig vergrößern, wenn man nur anzeigt, daß eben so viel von C wieder zu subtrahiren ist, als man nach Willkühr dazu addirt hat. Z. E. log. 900 = 5,9542425 — 3.

§. 85. Fällt eine Zahl q, welcher ein gegebener Logarithmus zugehört, zwischen p und p + 1; welches man erkennet, wenn log. q zwischen log. p und log. (p + 1) fällt: so suche man die Logarithmen von $p . 10^n$ und $(p + 1) 10^n$ auf, welches eben dieselben, nur um n vermehrt, sind §. 83, zwischen welche also der log. q um n vermehrt, d. i. log. $(q. 10^n)$ fällt, wodurch man also q in so viel Decimaltheilen findet, als n Einheiten enthält. Jedoch schränken die Tafeln diesen Vortheil nur auf ein gewisses n ein. Z. E. 0, 8944586 = log. q. fällt zwischen log 7 und log 8, folglich q zwischen 7 und 8. Setzt man seine Characteristik 3: so fällt er zwischen 7842 und 7843, folglich q zwischen 7, 842 und 7, 843.

§. 86. Umgekehrt ist also log. 7, 842 = log. 7842 — 3 = 0, 8944268. Aber log. 7, 84257 . . . . . fällt zwischen log. 7, 842 und log. 7, 843.

§. 87. Nimmt man an, daß die Differenzen solcher Zahlen, die wenig von einander abstehen, den Differenzen ihrer Logarithmen (mit 7 Decimalstellen) ziemlich genau proportionirt sind, wie an den Zahlen über 1000 wahrzunehmen ist, und anders wo (an der Logarithmischen Linie) noch genauer dargethan werden kann: so läßt sich n in §. 85. 86. über die Schranken der Tafeln ausdehnen. Denn bedeutet m eine ganze Zahl, und u einen ächten

Bruch

Bruch: so ist nach der Voraussetzung log. (m + 1) — log. m : log. (m + u) — log. m = 1 : u. Hiedurch findet man entweder das letzte Glied dieser Proportion, d. i. was zu m zu addiren ist, um die dem gegebenen log. (m + u) zugehörige Zahl zu haben; oder das zweyte Glied, d. i. was zu log. m zu addiren ist (die zugehörigen logarithmischen Proportionaltheile) um den der gegebenen Zahl (m + u) zugehörigen Logarithmus zu haben. Z. E.

1) man habe einen Logarithmus 0, 8944586: so fällt derselbe zwischen log. 7 und log. 8, oder, wenn man die Characteristik 3 hinzusetzt, zwischen log. 7842 und log. 7843, deren Differenz = 554, und übertrifft den kleinern um 318. Daher ist 554 : 318 = 1 : u folglich u = $\frac{318}{554}$ = 0,57 .... wo man an zehn höchstens Hunderttheilchen genug hat. Demnach ist die Zahl 7842, 57 wenn die Characteristik 3 ist, und 784257 wenn sie 5 ist, und 7, 84257 wenn sie 0 ist. Vergl. §. 84.

2) man habe die Zahl 7842, 57: so fällt ihr Logarithmus zwischen log. 7842 und log. 7843, deren Differenz = 554. Daher ist 1 : 0, 57 oder 100 : 57 = 554 : x, und x = 316, welche als Proportionaltheile zum log. 7842 addirt werden, daß also 3, 8944584 = log. 7842, 57 und 5, 8944584 = log. 784257, und 0, 8944584 = log. 7, 84257 ist.

Hätte man eine Zahl, die sich in Factoren zerlegen ließe, z. E. 1822632 = 3426 . 532: so ist der log. der Zahl, die Summe der log. ihrer Factoren §. 68. Hiedurch lassen sich obige Rechnungen prüfen. In den größern Tafeln findet man nicht nur die Logarithmen größerer Zahlen, welches obi-

ge

ge Rechnung genauer giebt, sondern auch die Rechnung mit den Proportionaltheilen sehr erleichtert.

§. 88. Der Logarithmus eines ächten Bruchs $\frac{a}{b}$, wo also $a < b$, ist der Logarithmus des umgekehrten Bruchs negativ genommen.

Denn $\frac{a}{b} = 1 . \frac{a}{b} = 1 : \frac{b}{a}$, folglich $\log. \frac{a}{b} = \log. 1 - \log. \frac{b}{a} = 0 - \log. \frac{b}{a} = - \log. \frac{b}{a}$; und das negative Zeichen bedeutet, daß bey allen Operationen, wobey $\log. \frac{a}{b}$ als Factor vorkömmt, $\log. \frac{b}{a}$ subtrahirt werden müsse; welches zugleich daraus erhellet, daß $S. \frac{a}{b} = S : \frac{b}{a}$, folglich $\log. (S : \frac{b}{a}) = \log. S - \log. \frac{b}{a}$ ist.

Z. E. für $\frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{100}$ findet man

log. 3 = 0, 4771213	log. 75 = 1, 8750613
log. 4 = 0, 6020600	log. 100 = 2, 0000000
log. $\frac{3}{4}$ = -- 0,1249387	log. 0,75 = -- 0,1249387

Nimmt man den gefundenen Logarithmus bejaht, und sucht ihn unter der Characteristik 3: so ist die zunächst zugehörige Zahl = 1333, folglich für die Characteristik 0, $= \frac{1333}{1000}$, folglich verneint $= \frac{1000}{1333} = \frac{3}{4}$ ohngefehr.

§. 89. Will man den Logarithmus eines ächten Bruchs positiv haben, so verfahre man nach §. 82. wenn man im Exempel §. 88. dem Zähler $\mp$ 1 beyfügt.

log.

log. 3 = 1,4771213 -- 1	log. 75 = 2,8750613 -- 1
log. 4 = 0,6020600	log. 100 = 2,0000000
log. $\frac{3}{4}$ = 0,8750613 -- 1	log. 0,75 = 0,8750613 - 1

Ein solcher Logarithmus, den man nach §. 84. durch C + M — n ausdrücken kann, bestehet aus zwey Theilen: einem bejahten und einem verneinten. Der verneinte bedeutet 1) daß von dem bejahten n,0000000 subtrahirt werden soll, wodurch aus dem Exempel §. 89. das Exempel §. 88 wird. 2) daß die Zahl, welcher der Logarithmus C + M in den Tafeln zugehört, mit 10^n dividirt werden müsse. Z. E. die dem im Exempel gefundnen Logarithmus zugehörige Zahl ist nach den Tafeln = 7,500 und wegen — 1, = 0,75.

§. 90. Für die Rechnung mit Potenzen geben die Logarithmen vorzügliche Vortheile. Es sey $a^n = P$: so ist n log. a = log. P, folglich auch log. a = $\frac{\log. P}{n}$, und n = $\frac{\log. P}{\log. a}$. Bey der dritten Gleichung sind die Logarithmen ganz unentbehrlich; bey der zweyten wird alle Schwierigkeit gehoben, wenn man log. P nach §. 84. ausdrückt, und nach Art des §. 89 rechnet. Z. E. log. $\sqrt[3]{\frac{5}{144}} = \frac{0,5406075 - 2}{3} = \frac{1,5406075 - 3}{3} = 0,5135358 - 1$ und log. $\sqrt[7]{\frac{5}{144}} = \frac{5,5406075 - 7}{7} = 0,7915153 - 1.$

III. Al-

III.

Algebraische Rechnung.

§. 91.

Eine Gleichung, aequatio, ist ein doppelter Ausdruck einerley Größe, als a — b — c = d + e — g. Diese beyden Ausdrücke heißen die Seiten, membra, und ihre Theile die Glieder, termini, der Gleichung.

§. 92. Wenn man zu beyden Seiten einer Gleichung einerley addirt, oder subtrahirt; oder beyde Seiten mit einerley multiplicirt, oder dividirt; oder beyde Seiten zu einerley Potenz erhebt, oder daraus einerley Wurzel ziehet: so bleibt noch eine Gleichung.

§. 93. Durch die Addition und Subtraction §. 92. lassen sich alle Glieder auf eine Seite bringen, daß auf der andern 0 stehet; auch lassen sich die Zeichen aller Glieder in die entgegengesetzten verwandeln, welches mit einzelnen Gliedern, durch die bloße Versetzung von der einen Seite auf die andere bewerkstelligt wird.

§. 94. Eine algebraische Aufgabe verlangt, den Werth unbekannter Größen aus gegebenen Bedingungen mittelst Gleichungen herzuleiten, und erfordert:

1. die Formation, d. i. die gegebenen Größen von den unbekannten genau zu unterscheiden; die Verbindung beyder aus den gegebenen Bedingungen zu bestimmen; und aus solcher Verbindung eine Gleichung herzuleiten.

2. Die

2. Die Reduction, d. i. durch Veränderung der Glieder einer Gleichung §. 92. ihr eine einfachere und schicklichere Gestalt zu geben; wobey vor allen Dingen darauf zu sehen ist, daß die Glieder, worinn die unbekannte Größe vorkömmt, beysammen auf eine Seite der Gleichung zu stehen kommen, auch die unbekannte Größe, wenn sie als Divisor oder unter einem Wurzelzeichen erscheint, eine veränderte Gestalt bekomme.

3. Die Solution, oder völlige Reduction, d. i. die zubereitete Gleichung nun weiter so zu behandeln, daß die unbekannte Größe auf der einen Seite allein, und nur lauter bekannte Größen auf der andern Seite stehen.

Anmerkung. Zur Erläuterung dieser Dinge dienen die im folgenden vorkommenden Exempel.

§. 95. Eine einfache Gleichung oder vom ersten Grade, heißt, worinn die unbekannte Größe nur in der ersten Potenz vorkömmt, auch darinn nicht höher steigen kann.

Aufgabe. A macht täglich a Meilen, und ist c Tage voraus (oder ist d Meilen voraus) B bewegt sich geschwinder, und macht täglich b Meilen; in wie viel Tagen hohlt er A ein?

Auflösung. Es geschehe dies in x Tagen: so A, $c+x$ Tage gegangen, und hat also $a(c+x)$ Meilen, B aber bx Meilen zurückgelegt. Demnach ist $bx = ac + ax$, folglich $(b-a)x = ac$, und $x = \frac{ac}{b-a}$ (oder $x = \frac{d}{b-a}$, weil $ac = d$ ist.)

Z. E. ein Bothe A macht täglich 4, ein andrer B, 6 Meilen, geht aber 3 Tage später aus. Hier

Hier ist a = 4, c = 3, b = 6, folglich $x = \frac{4 \cdot 3}{6-4} = 6$ Tagen.

Oder: ein Komet geht täglich 10 Grad, der Mond in eben der Richtung 13 Grad; jener aber ist schon 20 Grad voraus. Hier ist $x = \frac{d}{b-a} = \frac{20}{13-10} = 6\frac{2}{3}$ Tagen.

§. 96. Die Formel $bx = d + ax$ in §. 95, welche 4 Größen enthält, giebt eben so viele Gleichungen: $x = \frac{d}{b-a}$, $b = \frac{d}{f} + a$, $a = \frac{bx-d}{x}$, $d = (b-a)x$; daß sich also jede darinn befindliche Größe als unbekannt ansehen, und durch die übrigen bestimmen läßt.

Z. E. ein fliegend Corps B, welches täglich b = 5 Meilen zurücklegt, hohlt eine feindliche Truppe A, die d = 18 Meilen entfernt ist, und täglich a = 2 Meilen fortmarschirt, in x = 6 Tagen ein. Hier läßt sich jedes der 4 Stücke aus den 3 übrigen berechnen.

Oder: Ein Courier, der 10 Meilen täglich machen soll, ist schon $1\frac{1}{2}$ Tag weg (oder 15 Meilen voraus.) Er soll zurückgehohlt werden, ehe er über 60 Meilen zurückgelegt hat; wie viel Meilen (= b) muß der nachgeschickte täglich machen?

Oder: Um welche Zeit wird den Stundenzeiger A, der Minutenzeiger B, zwischen 7 und 8 Uhr decken? Wenn A auf 7 Uhr weiset, so weiset B auf 12 Uhr, folglich hat A, d = 7 Stunden voraus. A hat eine Geschwindigkeit a = 1, B aber b = 12 (weil A eine Stunde, und B, 12 Stunden

den in gleicher Zeit durchläuft). Demnach ist $x = \frac{d}{b-a} = \frac{7}{12-1} = \frac{7}{11}$ St. oder beynahe 38 M. 11 S. über 7 Uhr.

§. 97. Noch allgemeiner läßt sich die Frage §. 95. abfassen: Von einem Orte, der a Meilen vorwärts liegt, geht A, der m Meilen in n Stunden macht, h Stunden früher aus. B macht p Meilen in q Stunden, und wird A in x Stunden erreichen. —

Die Zeit für B ist x, für A aber $h + x$. Demnach hat man $n : m = x + h : \frac{m(x+h)}{n}$ den Weg für A; und $q : p = x : \frac{px}{q}$ den Weg für B. Nun hat A, a Meilen voraus. Demnach muß seyn $\frac{px}{q} = \frac{mx + mh}{n} + a = \frac{mx + mh + na}{n}$. Folglich ist $npx = mqx + mqh + nqa$, folglich $(np - mq)\,x = mqh + nqa$, und $x = \frac{mqh + nqa}{np - mq}$.

Z. E. A und B gehen von einem Orte aus, jener 9 Stunden früher. A macht 2, B aber 3 Meilen in der Stunde. Demnach ist hier $a = 1$, $h = 9$, $m = 2$, $n = 1$, $p = 3$, $q = 1$; folglich $x = \frac{2.9}{3.2} = 18$ Stunden.

§. 98. Will man in §. 97. eine Formel für den Weg, den A und B zurücklegen: so setze man den gefundnen Werth von $x = \frac{naq + mqh}{np - mq}$, für

A in $\frac{m(x+h)}{n}$, und für B in $\frac{px}{q}$. Dies giebt den Weg für B $= p. \frac{(na + mh}{(np - mq)}$, für A $= \frac{m}{n}$. $\frac{naq+mqh}{np-mq} + h = \frac{m}{n}$. $\frac{naq+nph}{np-mq} = \frac{m(aq+ph)}{np-mq}$. Setzt man die Zahlen im Exempel §. 97. so erhält man, für A sowohl als B, 54 Meilen.

§. 99. Giebt die Auflösung einer Aufgabe die unbekannte Größe negativ: so muß man sie in einem entgegengesetzten Sinne nehmen; oder will man die Größen, die in der Aufgabe vorkommen, in einem entgegengesetzten Sinne nehmen: so muß man sie negativ ansetzen.

Z. E. für §. 97 nehme man folgendes an: A reiset von Maynz aus, und macht 3 Meilen in der Stunde; B reiset von Rom 6 Stunden früher aus, und macht 2 Meilen in der Stunde. Wenn werden sie einander begegnen, da Maynz und Rom 100 Meilen von einander liegen?

Hier ist also a = 100. Nimmt man die Zeit x für B positiv: so ist hier h negativ, weil vorher A zuerst ausgieng, hier aber B zuerst ausgehet. Nimmt man p für B positiv, so ist m für A negativ, weil vorher A sich entfernte, hier aber dem B entgegen kömmt. Aber q und n bleiben beyde positiv, weil die Zeit während der Reise vorher und hier auf einerley Art verfließt.

Demnach ist $a = 100$, $h = -6$, $p = 2$, $m = -3$, $q = n = 1$. Setzt man diese Werthe in

in die gefundene Formel: so ist $x = \frac{100 + 18}{2 + 3} =$ $23\frac{3}{5}$ d. i. B wird in $23\frac{3}{5}$ Stunden nach seiner Abreise von Rom dem A begegnen. Der Weg für B, $\frac{pan + pmh}{np - qm}$ ist $\frac{2 \cdot 100 + (2 \times - 3 \times - 6)}{2 \times - (-3)} =$ $\frac{200 + 36}{5} = 47\frac{1}{5}$, daher für A, $52\frac{4}{5}$.

Hievon kann man sich auch durch die unmittelbare Berechnung überzeugen. Denn wenn x die Zeit für B ist, bis er A begegnet: so macht B, 2 x Meilen. A reiset x — 6 Stunden, und macht 3 (x - 6) Meilen, d. i. 3 x — 18. Daher ist $2x + 3x - 18 = 100$, d. i. $5x = 118$ und $x = \frac{118}{5}$, und der Weg, den er zurücklegt, $2x = \frac{2 \cdot 118}{5}$ Meilen.

§. 100. Anmerkung. Oft soll man bey einer Aufgabe mehr als eine unbekannte Größe finden, doch vorerst noch so, daß die gegebenen Bedingungen zu eben so viel verschiedenen Gleichungen hinreichen, als unbekannte Größen vorhanden sind; auch diese sämtlich in der ersten Potenz vorkommen, und keine mit der andern multiplicirt ist. Hievon handelt §. 101. bis 106.

§. 101. Die Auflösung der Aufgaben mit zwey unbekannten Größen x, y, für welche man 2 einfache Gleichungen $x + y = a$, und $fx + dy = b$ hat, kann auf dreyerley Art geschehen:

I. Man suche den Werth der einen unbekannten Größe z. E. x, in jeder Gleichung, und setze beyde Werthe einander gleich: so enthält die neue Gleichung die unbekannte Größe y allein, wodurch also x weggeschaft, oder eliminirt ist. Hier-

nach ist $x = a - y = \frac{b - dy}{f}$, folglich $fa - fy = b - dy$, folglich $(d-f)\,y = b - fa$, und $y = \frac{b - fa}{d - f}$. Setzt man diesen Werth statt y in eine der beyden ersten Gleichungen $x + y = a$, so hat man $x + \frac{b - fa}{d - f} = a$, folglich $(d-f)\,x + b - fa = da - fa$, folglich $(d-f)\,x = da - b$, und $x = \frac{da - b}{d - f}$.

II. Man suche in der einen Gleichung den Werth von $x = a - y$, und setze ihn anstatt x in die zweyte Gleichung $fx + dy = b$: so hat man $fa - fy + dy = b$, folglich $(d-f)\,y = b - fa$ und $y = \frac{b - fa}{d - f}$, wie zuvor.

III. Man kann auch eine der unbekannten Größen x eliminiren, wenn man mit dem Coefficienten, den sie in der einen Gleichung hat, die andere Gleichung multiplicirt, und von dieser die erste subtrahirt.

$$\begin{array}{c} dx + dy = da \\ fx + dy = b \\ \hline dx - fx = da - b \\ \hline x = \dfrac{da - b}{d - f} \end{array} \qquad \begin{array}{c} fx + fy = fa \\ fx + dy = b \\ \hline fy - dy = fa - b \\ \hline y = \dfrac{fa - b}{f - d} \end{array}$$

Hat aber die unbekannte Größe in beyden Gleichungen einen Coefficienten: so muß man jede Gleichung mit dem Coefficienten, den sie in der andern hat, multipliciren. Es sey

mx

$mx+ny=a$, und $fx+dy=b$, so erhält man $fmx+fny=fa$, und $mfx+mdy=mb$, oder $mdx+ndy=da$, und $fnx+ndy=nb$ u. s. w.

§. 102. Es läßt sich auch eine allgemeine Form für jede 2 Gleichungen mit 2 unbekannten Größen und für deren Werthe machen:

Aus 2 Röhren A, B, läuft Wasser in ein Gefäß. Das 1ste mahl läuft A, a, B, b Stunden, man findet c Maaß im Gefäß. Das 2te mahl läuft A, α, B, β Stunden, und man findet γ Maaß im Gefäß. Wie viel giebt jede Röhre stündlich?

A gebe x, B, y Maaß in jeder Stunde. Demnach ist das 1ste mahl $ax+by=c$, das 2te mahl $\alpha x+\beta y=\gamma$, folglich $x=\frac{c-by}{a}=\frac{\gamma-\beta y}{\alpha}$, folglich $ac-\alpha by=a\gamma-a\beta y$, folglich $(a\beta-\alpha b)y=a\gamma-\alpha c$, und $y=\frac{a\gamma-\alpha c}{a\beta-\alpha b}$.

Demnach $ax=c-by=c-\frac{ba\gamma-b\alpha c}{a\beta-\alpha b}=\frac{ca\beta-ba\gamma}{a\beta-\alpha b}=\frac{c\beta-b\gamma}{a\beta-\alpha b}.a$, oder $x=\frac{c\beta-b\gamma}{a\beta-\alpha b}$.

Z. E. Setzt man $a=2$, $b=3$, $c=195$; $\alpha=5$, $d=4$, $\gamma=330$: so ist $x=30$, $y=45$.

Setzt man aber $a=4$, $b=6$, $c=120$; $\alpha=3$, $\beta=7$, $\gamma=190$: so ist $x=\frac{300}{-10}$, $y=\frac{-400}{-10}$ d. i. $x=-30$, $y=40$; welches anzeigt, daß durch A stündlich 30 Maaß ausfließen, indem B stündlich 40 Maaß ausschüttet. Diesen

Umstand hätte man auch in die anfängliche Gleichung mit hineinbringen können.

§. 103. Diese Auflösung §. 12. gilt für alle Aufgaben des ersten Grades mit 2 unbekannten Größen. Z. E. Man soll 2 Zahlen x, y, finden, deren Summe S, und deren Differenz D gegeben ist, wo folglich $x+y=S$ und $x-y=D$. Demnach setze man (in den Gleichungen $ax+by=c$, und $\alpha x+\beta y=\gamma$ §. 12.) $a=1=b$, $c=S$; $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=D$. Dies giebt $x=\frac{-S-D}{-1-1}=\frac{-(S+D)}{-2}=\frac{S+D}{2}$, und $y=\frac{D-S}{-1-1}=\frac{-(S-D)}{-2}=\frac{S-D}{2}$, wie §. 30.

§. 104. Die Auflösung der Aufgaben mit drey unbekannten Größen x, y, z, für welche man 3 einfache Gleichungen A, B, C, hat, kann auf dreyerley Art geschehen.

Aufgabe. Ein Wirth wird gefragt, was er für Weine habe, und er antwortet: 2 Maaß von der 1sten Sorte, 2 M. von der 2ten und 1 M. von der 3ten kosten zusammen 1 Rthlr.; ferner 2 M. von der 1sten, 3 M. von der 2ten und 4 M. von der 3ten, kosten zusammen 2 Rthlr.; endlich 10 M. von der 1sten, 4 M. von der 2ten, und 2 M. von der 3ten kosten zusammen 3 Rthlr. Was wird 1 Maaß von jeder Sorte kosten?

Sie kosten nach der Reihe x, y, z, so ist

A) $2x+2y+z=1$

B) $2x+3y+4z=2$

C) $10x+4y+2z=3$

I. Auf-

I. Auflösung. 1) Man suche vor allen Dingen den Werth von x; nämlich

$$\text{in A)}\ x = \frac{1 - 2y - z}{2}$$

$$\text{in B)}\ x = \frac{2 - 3y - 4z}{2}$$

$$\text{in C)}\ x = \frac{3 - 4y - 2z}{10}$$

2) Man setze die beyden Werthe von x in A und B einander gleich $\frac{1 - 2y - z}{2} = \frac{2 - 3y - 4z}{2}$ (D); desgleichen die beyden Werthe von x in A und C einander gleich $\frac{1 - 2y - x}{2} = \frac{3 - 4y - 2z}{10}$ (E).

3) Man suche in D und E den Werth von y, nämlich in D, $y = 1 - 3z$, in E, $y = \frac{2 - 3z}{6}$, und setze diese Werthe einander gleich, $1 - 3z = \frac{2 - 3z}{6}$, d. i $6 - 18z = 2 - 3z$: so findet man daraus $z = \frac{4}{15}$.

4) Hieraus findet man $y = 1 - 3z = 1 - \frac{12}{15} = \frac{1}{5}$, und $x = \frac{1 - 2y - z}{2} = \frac{1 - \frac{2}{5} - \frac{4}{15}}{2} = \frac{15 - 6 - 4}{15 . 2} = \frac{1}{6}$.

II. Auflösung. 1) Man multiplicire A mit 4, und C mit 2, damit z überall einerley Coefficienten habe: so erhält man

A) $8x + 8y + 4z = 4$
B) $2x + 3y + 4z = 2$
C) $20x + 8y + 4z = 6$

2) Man subtrahire A von B, und B von C: so hat man

D) $-6x - 5y = -2$
E) $18x + 5y = 4$

3) Man addire D und E: so hat man $12x = 2$, und $x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; wodurch man auch y und z findet.

III. Auflösung. 1) Man suche in A den Werth von $x = \frac{1 - 2y - z}{2}$, und bringe ihn statt x in B und C: so erhält man

D) $1 - 2y - z + 3y + 4z = 2$, d. i. $y + 3z = 1$
E) $5 - 10y - 5z + y + 2z = 3$, d. i. $-6y - 3z = 2$.

2) Man suche in D den Werth von $y = 1 - 3z$, und substituire ihn in E: so hat man $-6 + 18z - 3z = -2$, d. i. $15z = 4$, und $z = \frac{4}{15}$; wodurch man auch y und z findet.

§. 105. Es läßt sich auch eine allgemeine Form für jede 3 Gleichungen mit 3 unbekannten Größen, und für ihre Werthe machen:

In jedem von 3 Magazinen sind dreyerley Arten Getreide, und man weiß, wie viel Maaß von jeder Art in jedem Magazine vorhanden, und wie viel jedes Magazin gekostet. Wie viel kostet im Durchschnitt ein Maaß von jeder Sorte?

1) Der mittlere Preiß eines Maaßes jeder Sorte nach der Reihe sey x, y, z.

Im

Im ersten Magazin sey die Zahl der Maaße von jeder Sorte a, b, c, und der Preiß des Magazins d: so ist

A) $ax + by + cz = d$, folglich $x = \frac{d - by - cz}{a}$

Im 2ten Magazin sey die Zahl der Maaße e, f, g, und der ganze Preiß h: so ist

B) $ex + fy + gz = h$, folglich $x = \frac{h - fy - gz}{e}$

Im 3ten sey die Zahl der Maaße k, l, m, und der ganze Preiß n: so ist

C) $kx + ly + mz = n$, folglich $x = \frac{n - ly - mz}{k}$

2) Setzt man den Werth von x in A und B, desgleichen in A und C, einander gleich: so erhält man

D) $ed - eby - ecz = ah - afy - agz$, folglich

$$z = \frac{ed - ah + (af - eb)y}{ec - ag} = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma}$$

E) $dk - bky - ckz = an - aly - amz$; folglich $z = \frac{dk - an + (al - bk)y}{ck - am} = \frac{\delta + \varepsilon y}{\phi}$

3) Setzt man die Werthe von z in D und E gleich: so erhält man $\alpha\phi + \beta\phi y = \gamma\delta + \varepsilon\gamma y$, oder $\alpha\phi - \gamma\delta = (\varepsilon\gamma - \beta\phi)y$, folglich $y = \frac{\alpha\phi - \gamma\delta}{\varepsilon\gamma - \beta\phi}$

4) Setzt man diesen Werth von y in eine der Gleichungen für z, z. E. in D: so erhält man $z = \frac{(\alpha + \beta\alpha\phi - \beta\gamma\delta)}{\varepsilon\gamma - \beta\phi} : \gamma = \frac{\alpha\gamma\varepsilon - \alpha\beta\phi + \alpha\beta\phi - \beta\gamma\delta}{(\gamma\varepsilon - \beta\phi)\gamma}$
$= \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\phi}$.

 5) Setzt

5) Setzt man die in 3 und 4 gefundnen Werthe von y und z in eine der vorhergehenden Gleichungen für x, z. E. in A. so erhält man $x = \frac{d}{a} - \frac{b}{a}$.

$$\frac{\alpha\phi - \gamma\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\phi} - \frac{c}{a} \cdot \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\phi} =$$

$$\frac{d(\gamma\varepsilon - \beta\phi) - b(\alpha\phi - \gamma\delta) - c(\alpha\varepsilon - \beta\delta)}{a(\gamma\varepsilon - \beta\phi)}$$

Z. E. $a = 30$ $e = 15$ $k = 10$
$b = 20$ $f = 6$ $l = 5$
$c = 10$ $g = 12$ $m = 4$
$d = 230$ $h = 138$ $n = 15$

folglich $\alpha = de - ah = -690$
$\beta = af - be = -120$
$\gamma = ce - ag = -210$
$\delta = dk - an = 50$
$\varepsilon = al - bk = -50$
$\phi = ck - am = -20$

Diese Werthe geben nun: $\alpha\phi - \gamma\delta = 24300$; $\alpha\varepsilon - \beta\delta = 40500$; $\gamma\varepsilon - \beta\phi = 8100$. Folglich ist $y = \frac{24300}{8100} = 3$; $z = \frac{40500}{8100} = 5$; $x =$

$$\frac{230.\ 8100 - 20.\ 24300 - 10.\ 40500}{30.\ 8100} = 4.$$

§. 106. Diese Auflösung §. 105. gilt für alle Aufgaben vom ersten Grade mit 3 unbekannten Größen. Z. E. Man hat 3 Massen zusammengeschmolzenes Metall, und es enthält 1 Pfund.

vom 1sten	7 Unz. Silber,	3 Unz. Kupfer,	6 Unz. Zinn
vom 2ten	12	3	1
vom 3ten	4	7	5

Nun

Nun frägt man, wie viel Unzen man von jeglicher Masse nehmen müsse (x, y, z), um eine 4te Masse zu machen, die 8 Unz. Silber, 3 Unz. 6 Quentch. Kupfer, 4 Unz. 2 Quentch. Zinn enthalte. Demnach ist klar, daß

1) die Menge des Silbers in diesen 3 Massen sey $\frac{7}{16}x$, $\frac{12}{16}y$, $\frac{4}{16}z$. Diese sollen zusammen 8 Unzen machen. Folglich ist $\frac{7}{16}x + \frac{12}{16}y + \frac{4}{16}z = 8$, oder $7x + 12y + 4z = 8 . 16 = 128$.

2) Die Menge des Kupfers auf eben die Art gebe $\frac{3x + 3y + 7z}{16} = 3\frac{6}{8}$ Unz. $= 3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$. Folglich $3x + 3y + 7z = \frac{15}{4} . 16 = 60$.

3) Die Menge des Zinns eben so gebe $\frac{6x + y + 5z}{16} = 4\frac{1}{4}$, folglich $6x + y + 5z = 4\frac{1}{4} . 16 = 68$.

Um nun diese Gleichungen aufzulösen, mache man

$a = 7$	$e = 3$	$k = 6$
$b = 12$	$f = 3$	$l = 1$
$c = 4$	$g = 7$	$m = 5$
$d = 128$	$h = 60$	$n = 68$. Daher ist

$\alpha = de - ha = -36$	$\delta = dk - an = 292$
$\beta = af - be = -15$	$\varepsilon = al - bk = -65$
$\gamma = ce - ag = -37$	$\varphi = ck - am = -11$

folglich $\alpha\varphi - \gamma\delta = 11200$; $\gamma\varepsilon - \beta\varphi = 2240$; $\alpha\varepsilon - \beta\delta = 6720$, und $y = \frac{11200}{2240} = 5$; $z = \frac{6720}{2240} = 3$; $x = \frac{128 . 2240 - 4 . 6720 - 12 . 11200}{7 . 2240} = 8$.

§. 107.

§. 107. Eine Gleichung heißt bestimmt, determinata, worinn nur eine unbekannte Größe vorkömmt; und eine Aufgabe heißt bestimmt, wenn sie durch eine bestimmte Gleichung aufgelöset wird.

Anmerkung. Die unbekannte Größe in der Gleichung wird durch die übrigen bekannten Größen so bestimmt, daß sie nur einen Werth (wie bey den einfachen Gleichungen) oder eine bestimmte Anzahl von Werthen hat (wovon die quadratischen Gleichungen ein Beyspiel geben werden.) Eine Aufgabe kann auf unbestimmte Gleichungen führen, und dennoch bestimmt seyn, wenn sich aus ihr so viel unbestimmte Gleichungen machen lassen, als unbekannte Größen vorhanden sind. §. 100.

§. 108. Eine bestimmte Gleichung heißt zusammengesetzt, worinn die unbekannte Größe die 1ste Potenz übersteigt; und ist hienach vom 2. 3. 4 und höhern Grade, oder eine quadratische, cubische, biquadratische und höhere Gleichung. Z. E. $x^2 = A$ ist eine quadratische Gleichung, oder vom 2ten Grade; und allgemein $x^n = Q$ eine Gleichung vom nten Grade, welche Form auch die einfachen Gleichungen unter sich begreift, wenn man auch $n = 1$ setzt.

§. 109. Eine bestimmte Gleichung ist rein, wenn die unbekannte Größe blos in der Potenz, wovon die Gleichung den Nahmen führet, darinn vorkömmt; gemischt oder unrein aber, wenn sie außer dieser Potenz noch andere niedrere Potenzen der unbekannten Größe enthält.

Z. E. $x^m = p$ ist eine reine, aber $x^m + x^{m-1} \ldots = q$ eine gemischte oder unreine Gleichung von mten Grade.

§. 110.

§. 110. Eine gemischte Gleichung heißt vollständig, wenn sie die unbekannte Größe in allen Gliedern der Potenzen nach den natürlichen Zahlen von o an bis zu dem Grade enthält, wonach die Gleichung den Nahmen führet; unvollständig aber, wenn ein oder mehrere Grade fehlen. Hienach ist z. E. $x^3 + mx^2 + nx + q = 0$, wo die Coefficienten bejaht oder verneint seyn können, der allgemeine Ausdruck, oder die allgemeine Form jeder vollständigen cubischen Gleichung. Setzt man hierinn einen Coefficienten $= 0$: so wird die Gleichung unvollständig.

§. 111. Die Wurzel, radix, einer Gleichung heißt der Werth der unbekannten Größe in der Gleichung, durch dessen Bestimmung sie aufgelößt wird. Die ersten Anfänger müssen sich mit den Wurzeln quadratischer Gleichungen begnügen lassen, wovon auch nur vorzüglicher Gebrauch für sie zu machen ist.

§. 112. Aufgabe. Die Wurzel einer reinen Gleichung zu finden.

Auflösung. Ihr allgemeiner Ausdruck ist $x^n = p$, folglich $x = \sqrt[n]{p}$; oder durch Hülfe der Logarithmen $n\,lx = lp$, folglich $lx = \frac{lp}{n}$ vergl. §. 90.

Anmerkung. Bey einer quadratischen Gleichung $x^2 = r$ folglich $x = \mp \sqrt{r}$ §. 40. findet man für x einen doppelten Werth. In höhern Gleichungen könnte also x wohl noch mehrere Werthe haben; aber diese Untersuchung muß noch ausgesetzt bleiben, hier begnügen wir uns mit einem Werthe.

§. 113. **Aufgabe.** Eine gemischte quadratische Gleichung aufzulösen, oder ihre Wurzeln zu finden.

Auflösung. Ihre allgemeine Form sey $x^2 + px + q = 0$: so ist $x = \frac{1}{2} p \mp \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + q)}$ wo p und q bejaht oder verneint seyn können.

Beweis. Die allgemeine Form giebt $x^2 - px = q$ folglich $x^2 - px + \frac{1}{4} p^2 = \frac{1}{4} p^2 + q$ folglich $x - \frac{1}{2} p = \mp \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + q)}$ folglich $x = \frac{1}{2} p \mp \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + q)}$.

Z. E. Eine Größe a soll getheilt werden, daß der größere Theil x, folglich der kleinere $a - x$ und alsdann $a : x = x : a - x$ sey. — Aus der Voraussetzung folgt $x^2 = a^2 - ax$, oder $x^2 + ax - a^2 = 0$, folglich $x = -\frac{a}{2} \mp \sqrt{(\frac{a^2}{4} + a^2)} = -\frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = -\frac{a}{2} \mp \frac{a}{2}\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)\frac{a}{2}$.

§. 114. Eine Gleichung heißt unbestimmt, wenn sie mehr als eine unbekannte Größe enthält; eine Aufgabe heißt unbestimmt, wenn sie durch eine unbestimmte Gleichung aufgelöset wird. §. 107.

§. 115. Nimmt man in einer unbestimmten Gleichung mit zwey unbekannten Größen (z. E. $xy = 100$, folglich $y = \frac{100}{x}$) die eine x als bekannt an, und betrachtet sie als eine veränderliche Größe, der man beliebige Werthe beylegen könne: so geben verschiedene Werthe von x auch verschiedene Werthe von y. (Kommen mehr als 2 unbekannte Größen in der Gleichung vor; so nimmt man sie alle, bis auf eine, als bekannt an.)

§. 116. Ist die Frage bey einer Gleichung, wie $xy = 100$, blos auf bejahte ganze Zahlen eingeschränkt:

geschränkt: so darf man nur solche Werthe von x annehmen, und nur solche Werthe von y zulassen, als mit dieser Bedingung bestehen können; aber man soll dann auch alle diese Werthe finden. Z. E. für die Werthe 2, 4, 5, 10 von x, erhält man die Werthe 50, 25, 20, 10 von y. Andere Werthe von x und y können mit der Bedingung der Frage nicht bestehen.

Anmerkung. Hiedurch wird die Zahl der Werthe von x bestimmt, doch nicht so, wie § 112, wo aus der Gleichung $x^2 = r$ folgt $x = \mp \sqrt{r}$; oder wie § 113, wo aus der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ folgt $x = \frac{1}{2} p \mp \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + q)}$. Denn hier kommt der doppelte Werth von x nicht von einem doppelten Werthe einer zweyten unbekannten Größe, sondern von der zweyten Potenz der einen unbekannten Größe x.

§. 117. Gemeiniglich erfordern die Bedingungen der Frage bey einer Gleichung wie $y^2 - x^2 = a$ folglich $y^2 = a + x^2$, und $y = \mp \sqrt{(a + x^2)}$ daß die Werthe von y rational seyn sollen; wo es dann blos darauf ankommt, für x solche Werthe anzunehmen, daß $a + x^2$ eine vollständige Quadratzahl werde, woraus sich die Quadratwurzel genau ziehen lasse.

Anmerkung. Die hiezu erforderlichen Kunstgriffe waren den Alten unentbehrlich, da ihnen die Irrationalzahlen mehrere Schwierigkeiten machten. Zur Uebung des Verstandes, und zu größerer Fertigkeit in analytischen Rechnungen, sind sie noch dienlich. Die hier gesteckten Gränzen erfordern und verstatten dergleichen Untersuchungen nicht.

IV. Pra-

IV.

Practische Arithmetik.

§. 118.

Will man bey der Regel Detri nur den Unterschied des vierten Gliedes vom dritten finden; so setze man $a : a + e = b : b + f$, folglich $ab + af = ab + be$, oder $af = be$, folglich $f = \frac{be}{a}$, bejaht oder verneint, nach dem e es ist.

§. 119. Für die zusammengesetzte Regel Detri läßt sich eine allgemeine Gleichung machen. Denn wenn V, v, Ursachen; T, t Zeiten; und E, e Wirkungen bedeuten: so ist, wenn $T = t$, $V : v = E : \varepsilon$ und wenn $V = v$, $T : t = \varepsilon : e$; folglich $VT : vt = E : e$, folglich $VTe = vtE$, wodurch jedes der 6 Stücke aus den 5 übrigen gefunden werden kann.

§. 120. Aufgabe. Es sind zwey Dinge von gegebenem Werthe zu mischen, daß ein gegebener mittlerer Werth herauskomme; man soll die Quantität der beyden Dinge finden. Dies heißt die Alligationsrechnung. (Arithm. §. 190.)

Auflösung. Der Werth der Einheit des bessern sey $= a$, des geringern $= b$, der Mischung $= c$. In der Mischung sey vom geringern der Theil x, folglich vom bessern der Theil $1 - x$: so ist jenes Werth $= bx$, dieses $= a(1 - x) = a - ax$. Demnach ist $bx + a - ax = c$, folglich $(b - a)x = c - a$ (oder §. 93.) $x(a - b) = a - c$, folglich $x = \frac{a - c}{a - b}$.

Z. E.

Z. E. soll aus guten Wein zu 16 Gr. $= a$ und schlechtern zu 10 Gr. $= b$ ein gemischter zu 12 Gr. $= c$ werden: so ist $x = \frac{16-12}{16-10} = \frac{2}{3}$. Nähme man Wasser anstatt des schlechtern Weins: so wäre $b = 0$, und $x = \frac{a-c}{a} = \frac{16-12}{16} = \frac{1}{4}$.

Oder aus 15löthigen und 9löthigen Silber soll 13löthiges gemacht werden; da dann $a = \frac{15}{16}$, $b = \frac{9}{16}$, $c = \frac{13}{16}$; folglich $x = \frac{15-13}{16} : \frac{15-9}{16} = \frac{1}{3}$, wovon die Probe ist: $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$, und $\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{10}{16}$, da dann $\frac{3}{16} + \frac{10}{16} = \frac{13}{16}$.

Anmerkung. Die gewöhnliche Behandlung der Alligationsrechnung in den gemeinen Rechenbüchern gründet sich auf folgendes: Man nehme vom bessern eine Quantität x, vom geringern y, so ist nach obigen der Werth des bessern ax, des geringern by, der Mischung $c(x+y)$ folglich $ax + by = cx + cy$, oder $(a-c)x = (c-b)y$ folglich $x : y = c - b : a - c$.

§. 121. Aufgabe. Es soll von zwey Dingen, deren Verhältniß gegeben ist, eins durchs andere mit Hülfe der Logarithmen genau ausgedruckt werden.

Auflösung. Eine Einheit des größern heiße A, des kleinern B, und es sey $A : B = a : b$, so ist

$$A = \frac{a}{b} \cdot B = \frac{b + a - b}{b} \cdot B = \left(1 + \frac{a-b}{b}\right) B$$

$$B = \frac{b}{a} \cdot A = \frac{a + b - a}{a} \cdot A = \left(1 - \frac{a-b}{a}\right) A.$$

Nun seyen m Einheiten des größern, n Einheiten des kleinern gleich, d. i. $mA = nB$: so ist $mA = m\left(1 + \frac{a-b}{b}\right)B$ und $nB = n\left(1 - \frac{a-b}{a}\right)A$; folglich $n = m\left(1 + \frac{a-b}{b}\right)$ und $m = n\left(1 - \frac{a-b}{a}\right)$.

Demnach kann man die beständigen log. $\frac{a-b}{b}$, und log. $\frac{a-b}{a}$, berechnen, jenen zum log. m, diesen zum log. n addiren, und hieraus die Zahlen finden; jene, die zu m muß addirt werden, um n zu erhalten; diese, die von n muß abgezogen werden, um m zu erhalten.

§. 122. Bedeutet in einer arithmetischen Reihe §. 48. a das erste, u das letzte Glied; n die Zahl, d die Differenz der Glieder: so ist $u = a + (n - 1)d$ §. 48, wo d bejaht für die steigende, und verneint für die fallende Reihe ist §. 49.

§. 123. Jedes folgende Glied der Reihe, R, das von einem der vorhergehenden M an, das rte ist, ist $= M + (r - 1)d$.

Denn das nte Glied vom ersten a an gerechnet, ist $= a + (n - 1)d$ §. 122. Nun kann man jedes Glied M als das erste ansehen. Folglich ist auch das rte von M an gerechnet $= M + (r - 1)d$.

§. 124. Nimmt man 3 oder 4 beliebige Glieder der Reihe, aber in gleichem Abstande von einander: so machen solche eine arithmetische Proportion §. 41. weil sie wegen ihres gleichen Abstandes gleiche Differenzen haben. §. 123.

§. 125. Die Summe der beyden äußersten Glieder der Reihe ist der Summe jeder zweyer Glieder, die von jenen gleich weit abstehen; und wenn n ungerade ist, dem mittelsten Gliede doppelt genommen gleich.

Denn da die genannten Glieder immer eine arithmetische Proportion machen §. 124: so erhellet der Satz aus §. 45. 46.

§. 126. Bedeutet S die Summe aller Glieder der Reihe, und das übrige wie im §. 122: so ist $S = \left(\frac{a+u}{2}\right)n.$

Denn ist n gerade: so kann man statt jedes gleich weit abstehenden Paares die Summe der äußersten $a + u$ setzen §. 125, wodurch auf jedes Glied der Werth von $\frac{a+u}{2}$ kommt, daher offenbar $S = \frac{a+u}{2}.n$; ist n ungerade: so kömmt auf das mittelste Glied $\frac{a+u}{2}$ §. 125. wie zuvor auf jedes der übrigen Glieder, folglich ist auch wie zuvor $S = \frac{a+u}{2}.\, n.$

§. 127. Auch ist S (§. 126) $= (2\,a + (n - 1)\,d)\frac{n}{2}$ §. 122. Ist $d = a$: so ist in §. 122. $u = na$, folglich in §. 126. $S = \frac{(a + n\,a)\,n}{2} = \frac{(n.n + 1)\,a}{2}.$

§. 128. Sind von den fünf Dingen a, u, d, n, S, drey gegeben, so lassen sich daraus die beyden übri-

gen durch obige Gleichungen finden, wie §. 96. Hieraus entstehen folgende Aufgaben:

gegeben	gesucht	gegeben	gesucht
a d n	S u	a S u	n d
a d S	n u	d n S	a u
a d u	n S	d n u	a S
a n S	d u	d S u	a n
a n u	d S	n S u	a d

Giebt die Rechnung n als einen Bruch: so zeigt dies eine Theilung der Grundverhältniß an §. 70.

§. 129. Bedeutet in einer geometrischen Reihe §. 52. a das erste, u das letzte Glied, n die Zahl der Glieder, und e den Quotienten, oder den Nahmen der Verhältnisse: so ist $u = ae^{n-1}$ §. 52. folglich auch $ue = ae^n$, wo $e > 1$ für die steigende, < 1 für die fallende Reihe ist §. 53.

§. 130. Jedes folgende Glied der Reihe, R, das von einem der vorhergehenden M an, das rte ist, ist $= M. e^{r-1}$. Denn das nte Glied von a an gezählet, ist $= a . e^{n-1}$ §. 129. Nun kann man jedes Glied als das erste ansehen. Folglich ist auch das rte von M an $= M . e^{r-1}$.

§. 131. Nimmt man 3 oder 4 beliebige Glieder der Reihe, aber in gleichem Abstande von einander: so machen solche eine geometrische Proportion §. 43. weil sie wegen ihres gleichen Abstandes gleiche Quotienten haben. §. 130.

§. 132. Das Product aus den beyden äußersten Gliedern der Reihe ist dem Producte aus jeden zwey Gliedern, die von jenen gleich weit abstehen

hen; und wenn n ungerade ist, dem Quadrate des mittelsten Gliedes gleich.

Denn da die genannten Glieder immer eine geometrische Proportion machen §. 131. so erhellet der Satz aus (§. 162. 166. Arithm.)

§. 133. Bedeutet S die Summe aller Glieder der Reihe, und das übrige wie im §. 129. so ist $a : ae = S - u : S - a$, d. i. das erste Glied zum zweyten wie die Summe aller Glieder weniger dem letzten, zur Summe aller Glieder weniger dem ersten.

Denn da die Glieder in gleichen zusammenhängenden Verhältnissen fortlaufen: so sind alle, außer dem letzten, Vorderglieder, deren Summe $S - u$; auch alle, außer dem ersten, Hinterglieder, deren Summe $S - a$. Daher ist $a : ae = S - u : S - a$ (Ar. §. 171.)

§. 134. Haben die Buchstaben die Bedeutung wie in §. 133. so ist $S = \frac{ue - a}{e - 1} = \frac{ae^n - a}{e - 1} = \left[\frac{e^n - 1}{e - 1}\right] a$. (Für die steigende, und $\frac{a - ue}{1 - e} = \frac{a - ae^n}{1 - e} = \frac{(1 - e^n)}{1 - e} a$ für die fallende Reihe. §. 129.)

Denn da $a : ae = S - u : S - a$ §. 133: so ist $ae - a : a = (S - a) - (S - u) : S - u = u - a : S - u$ (Ar. §. 169.) folglich $S - u = \frac{(u - a) a}{ae - a} = \frac{u - a}{e - 1}$, folglich $S = \frac{u - a}{e - 1} + u = \frac{ue - a}{e - 1}$, wo $ue = ae^n$ §. 129.

§. 135. Ist u sehr groß gegen a: so giebt es keinen beträchtlichen Fehler, wenn man setzt $S = \frac{ue}{e-1}$. Ist e = a: so enthält die Reihe lauter Potenzen von e, deren Summe $= \frac{e^{n+1}-e}{e-1}$. Ist a = 1: so ist $S = \frac{e^n-1}{e-1}$. Ist nun hier e eine ganze Zahl: so ist es gewiß auch S, welches dient, Zahlen zu finden, die sich ohne Rest dividiren lassen. Z. E. $\frac{9^8-1}{8-1}$.

§. 136. Sind von den fünf Dingen a, u, e, n, S, drey gegeben: so lassen sich daraus die beyden übrigen durch obige Gleichungen finden; welches eben die Fälle wie §. 128. giebt, wo man nur e statt d setzen darf.

Giebt die Rechnung n als einen Bruch, so bedeutet dies eine Theilung der Verhältniß §. 70. Man findet aber n durch Hülfe der Logarithmen. Denn weil $u = e^{n-1}a$, §. 129. so ist $lu = (n-1)le + la$, folglich $\frac{lu - la}{le} = n - 1$, also $\frac{lu - la}{le} + 1 = n$. Hiezu braucht man Tafeln, die auf mehrere Decimalstellen berechnet sind, und selbst diese größern Tafeln übersteigt u, da man dann nur die höchsten Ziffern findet.

§. 137. Aufgabe. Ein Kapital a stehet n Jahr auf $\frac{q}{r}$ Zinsen, welche jährlich dazu geschlagen werden (Ar. §. 204.) wie groß wird nach Verlauf dieser Zeit sein Werth S seyn?

Auflösung. Da $r : r + q = a : a . \frac{r+q}{r}$ (A)
folglich nach 2 Jahren $A . \frac{r+q}{r} = a . \left(\frac{r+q}{2}\right)^2$ (B)
und nach 3 Jahren $B . \frac{r+q}{r} = a . \left(\frac{r+q}{r}\right)^3$ u. s. w.
so ist nach n Jahren $a . \left[\frac{r+q}{r}\right]^n = S$. Denn wenn dies Gesetz für $n - 1$ Jahre statt findet, daß der Werth $a \left[\frac{r+q}{r}\right]^{n-1} = Q$ ist: so ist der Werth nach n Jahren $= Q . \frac{r+q}{r} = a \left[\frac{r+q}{r}\right]^n$. Demnach ist

I. $lS = la + nl \left[\frac{r+q}{r}\right]$ z. E. $a = 1000$ Rthlr., $n = 20$ Jahr, $\frac{q}{r} = \frac{5}{100}$

II. $la = lS - nl \left[\frac{r+q}{r}\right]$ z. E. 1000 Rthlr. ist nach n Jahren ohne Zinsen gefällig; wie groß ist sein jetziger Werth a? Oder: ich will nach n Jahren 10000 Rthlr.; wie viel Kapital a ist dazu nöthig?

III. $l(r+q) = \frac{lS - la + nlr}{n}$. Z. E. $S = 10000$ nach $n = 10$ Jahren gefällig wird verkauft für $a = 6756$ Rthlr.; wie viel Procent q? Oder: aus 6 Menschen nach der Sündfluth war nach 200 Jahren eine Million geworden; wie groß war jährlich die Bevölkerung?

IV. $n = \frac{lS - la}{l\left[\frac{r+q}{r}\right]}$. Z. E. $a = 1000$ bringt $S =$ 2500 zu 5 Procent; wie viel Jahre?

§. 138. Aufgabe. Ein Kapital a stehet unter vorigen Bedingungen §. 137. und wird am Ende eines jeden Jahres mit einem Kapitale b unter eben den Bedingungen vermehrt; wie groß ist der gesammte Werth T nach n Jahren?

Auflösung. Das erste b wird am Ende des ersten, d. i. zu Anfange des 2ten Jahres angelegt, und stehet also 1 Jahr weniger, d. i. $n - 1$ Jahr; das zweyte b, $n - 2$ Jahr und so fort, das letzte b, 1 Jahr. Setzt man nun z für $\frac{r+q}{r}$: so ist der Werth

für a $= az^n$
für das erste b $= bz^{n-1}$
für das zweyte b $= bz^{n-2}$ u. s. w.
für das letzte b $= bz$. Demnach ist

$$T = az^n + b(z + z^2 \ldots\ldots + z^{n-1})$$
$$= az^n + b\left[\frac{z^n - z}{z - 1}\right] \text{ §. 135.}$$

Setzt man den Werth für z: so ist

$$T = a\left[\frac{r+q}{r}\right]^n + \frac{b\left[\frac{r+q}{r}\right]^n - b\left[\frac{r+q}{r}\right]}{\frac{r+q}{r} - 1},$$ wo der Divisor

$$\frac{r+q-r}{r} = \frac{q}{r} \text{ also } T = a\left[\frac{r+q}{r}\right]^n + \frac{br}{q}\left[\frac{r+q}{r}\right]^n$$
$$- \frac{b}{q}(r+q) \text{ d. i.}$$

$$V. \quad T = \frac{aq + br}{q} \cdot \left(\frac{r+q}{r}\right)^n - \frac{b(r+q)}{q}$$

Nimmt man $b = a$, daß aus T, R wird: so ist

$$VI. \quad R = a \cdot \frac{r+q}{q} \left(\frac{r+q}{r}\right)^n - a \frac{r+q}{q}, \text{ folglich}$$

$$VII. \quad a = \frac{Rq}{(r+q)\left(\frac{r+q}{r}\right)^n - (r+q)}. \text{ Z. E.}$$

R = 10000 Rthlr. nach n = 20 Jahren ohne Zinsen gefällig, soll so abgewogen werden, daß jährlich eine gleiche Summe a bezahlt wird, (so daß a jährlich mit den Zinsen, und mit a vermehrt, nach n Jahren R bringt) wie groß muß a seyn?

Ferner ist nach VI. $\frac{Rq + ar + aq}{ar + aq} = \left(\frac{r+q}{r}\right)^n$, folglich $l\,(Rq + ar + aq) - l\,(ar + aq) = n\,l\left(\frac{r+q}{r}\right)$, folglich

$$VIII. \quad n = \frac{l(Rq + ar + aq) - l(ar + aq)}{l\left(\frac{r+q}{r}\right)}. \text{ Z. E.}$$

ich zahle wie zuvor jährlich a; in wie viel Jahren ist R abgetragen?

§. 139. Aufgabe. Es hat jemand eine jährliche Rente a durch n Jahre zu genießen, und will sie verkaufen; welches ist ihr jetziger Werth P?

Auflösung. Dieser Werth P als ein Kapital angelegt, ist nach n Jahren $= P \cdot \left(\frac{r+q}{r}\right)^n$ §. 133. Diesem muß der Werth R der jährlichen Rente a nach n Jahren gleich seyn. Man findet aber R,

wenn man in VI $(n-1)$ statt n setzt (weil a erst nach Ende des ersten Jahres angelegt wird) und a addirt, (weil nach Verlauf des nten Jahres noch ein a ohne Zinsen fällt.) Demnach ist in VI. R. $= \frac{ar+aq}{q} \cdot \left[\frac{r+q}{r}\right]^{n-1} - \frac{ar+aq}{q} + a$, wo die beyden letzten Glieder $= \frac{-ar-aq+aq}{q} = -\frac{ar}{q}$.

Demnach ist $P. \left[\frac{r+q}{r}\right]^{n} = \frac{ar+aq}{q} \cdot \left[\frac{r+q}{r}\right]^{n-1} - \frac{ar}{q}$. Dividirt man beyde Seiten dieser Gleichung mit $\left[\frac{r+q}{r}\right]^{n}$, so wird das erste Glied P; das zweyte $a \cdot \frac{r+q}{q} \cdot \frac{1}{\frac{r+q}{r}}$, d. i. $\frac{ar}{q}$; das dritte $\frac{ar}{q} \cdot \left[\frac{r}{r+q}\right]^{n}$. Folglich ist

$$\text{IX. } P = \frac{ar}{q} - \frac{ar}{q} \cdot \left[\frac{r}{r+q}\right]^{n}. \text{ Z. E.}$$

für eine jährliche Rente a auf n Jahr muß ich der allgemeinen Leihebank das Kapital P zahlen; wo freylich $a >$ als die Zinsen $P \cdot \frac{q}{r}$.

Hieraus folgt auch $Pq = (r - r \cdot \frac{r^n}{r+q})\, a$, folglich

$$\text{X. } a = \frac{Pq}{r - r\left[\frac{r}{r+q}\right]^{n}}. \text{ Z. E.}$$

Für das Kapital P erhalte ich auf n Jahr die Rente a. Oder: wie groß ist für das Kapital P die

die Leibrente a, wenn die Bank meine Lebenszeit n Jahre schätzt, und q Zinsen zahlt. Oder: eine Schuld P, die jährlich mit q Procent zu verzinsen ist, soll in n Jahren abgetragen seyn, wenn jährlich eine gleiche Summe a? gezahlt wird.

Ferner ist aus IX, letzte Formel

$$ar.\left[\frac{r}{r+q}\right]^n = ar - Pq, \text{ folglich } \left[\frac{r}{r+q}\right]^n =$$

$$\frac{ar - Pq}{ar} \text{ und } n.\,l\,\frac{r}{r+q} = l\,(ar - Pq) - l\,ar,$$

folglich

$$\text{XI. } n = \frac{l(ar - Pq) - l\,ar}{l\,r - l\,(r+q)} = \frac{l\,ar - l\,(ar - Pq)}{l(r+q) - l\,r}.$$

Z. E. für das Kapital P zu q Procent genieße ich die Rente a, die größer als die Zinsen $P.\frac{q}{r}$, nach wie viel Jahren wird das ganze Kapital verzehrt seyn?

§. 140. Die Zahl der Versetzungen, oder Permutationen von n Dingen ist

$$n.\ n-1.\ n-2 \ldots\ldots\ldots 3.\ 2.\ 1.$$

Denn es sey der Satz von n—1 Dingen wahr, daß die Zahl der Permutationen n—1. n—2..... 3. 2. 1. sey, und es komme das nte Ding hinzu: so kann es in jeder der vorhergehenden Ordnungen n—2 Zwischenstellen, und 2 äußere, also überhaupt n Stellen einnehmen; wodurch aus jeder der vorhergehenden Ordnungen n Ordnungen werden, d. i. die Zahl der vorigen n mahl größer wird, folglich die Zahl der Permutationen für n Dinge = n. n. 1 .... 1 ist. Nun aber läßt sich leicht zeigen, daß für 3 Dinge diese Zahl sey = 3. 2. 1, folglich für 4 Dinge 4. 3. 2. 1. u. s. w.

Z. E. Die 5 Vocalen leiden 120 Versetzungen; die 6 Wörter in dem Denkspruche: una salus victis nullam sperare salutem, lassen sich 720 mahl versetzen; die 8 Töne in der Musik können 40320 mal mit einander abwechseln.

§. 141. Die Zahl der Versetzungen von n Dingen sey M. Diese verwandelt sich in die Einheit $\frac{M}{M}$, wenn alle diese n Dinge einerley sind. Nun habe man $n+1$ Dinge: so ist die Zahl ohne Versetzungen $\overline{n+1}.M$, folglich wenn n Dinge einerley sind, $\frac{\overline{n+1}.M}{M}$. Hieraus entsteht die Regel: wenn n Dinge zu versetzen, darunter m Dinge einerley, so bestimme man zuerst die Zahl der Versetzungen, als wären sie alle verschieden, und dividire dies mit der Zahl der Versetzungen derjenigen Dinge darunter, die einerley sind. Dies giebt

$$\frac{1.2.3\ldots m\,.\,\overline{m+1}\,.\,\overline{m+2}\ldots n}{1.2.3\ldots m} = \overline{m+1}\,.\,\overline{m+2}\ldots n.$$

Käme daher unter n Dingen eins m mahl, ein anders p mahl, ein drittes t mahl vor: so wäre die Zahl der Versetzungen

$$= \frac{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}\ldots\ldots 2.\,1.}{m.\,\overline{m-1}\ldots 1.\,p.\,\overline{p-1}\ldots 1.\,t.\,\overline{t-1}\ldots 1.}$$

z. E. das Wort studiosus hat 9 Buchstaben, worunter 3 s und 2 u. Demnach ist die Zahl der Versetzungen, oder Anagrammen dieses Worts

$$= \frac{9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1.}{3.\,2.\,1.\quad 2.\,1.} = 30240.$$

§. 142. Nimmt man aus einer gegebenen Menge von Dingen so viel Paare, Dreyen, Vieren u. s. w. als sich thun läßt: so heißen solches

Ver-

Verbindungen oder Combinationen nach 2, 3, 4, 5 u. s. w. oder Amben, Ternen, Quaternen, Quinen u. s. w. Hiebey will man entweder die verschiednen Versetzungen zugleich mit haben, oder nimmt auf die verschiedne Stellung der Dinge darin keine Rücksicht, daß man z. E. bey den Amben ab und ba nur für eine ansiehet.

§. 143. Aufgabe. Man soll die Combinationen nach m von n Dingen zugleich mit ihren Versetzungen finden.

Auflösung. Hätte man 5 Buchstaben, a, b, c, d, e: so paare man jeden derselben mit den übrigen, welches 5 Reihen, jede zu 4 Paaren, folglich 5 . 4 Paare giebt.

ab,	ac,	ad,	ae.
ba,	bc,	bd,	be.
ca,	cb,	cd,	ce.
da,	db,	dc,	de.
ea,	eb,	ec,	ed.

Allgemein: n Dinge geben für jedes derselben n — 1 Paare, folglich diese n mahl genommen (n . n — 1) Paare oder Amben. Wollte man Ternen haben: so geben, wenn man a absondert, die übrigen n — 1 Buchstaben nach Obigem (n — 1 . n — 2) Amben, und diese mit a verbunden, eben so viel Ternen. Da nun dieses von jedem der gegebenen Buchstaben gilt: so hat man n mahl so viel, also n . n — 1 . n — 2 Ternen. Eben so wird gezeigt, daß für n Dinge die Zahl der Quaternen, oder Combinationen nach 4 sey = n . n — 1 . n — 2 . n — 3; folglich, nach der Analogie, allgemein die Zahl der Combinationen nach m sey = n . n — 1 . n — 2 .... n — (m — 1)

§. 144. Aufgabe. Man soll die Combinationen nach m von n Dingen ohne Versetzungen finden.

Auflö-

Auflösung. Von 5 Buchstaben paare man jeden nur mit dem darauf folgenden: so hat man die Hälfte der Combinationen in §. 143. weil dort jeder Buchstabe mit einem andern, und dieser andre wieder mit dem ersten gepaart, z. E. ab und ba, jede Ambe doppelt giebt.

ab,	ac,	ad,	ae.
bc,	bd,	be.	
cd,	ce.		
de.			

Allgemein findet dies auch in dem Producte (n.n—1) §. 143. statt, daher dasselbe mit 2 zu dividiren, also die Zahl der Amben ohne Versetzungen $= \frac{n . n - 1}{1 . 2}$ ist. Für die Ternen, wenn man a absondert, geben die übrigen n — 1 Buchstaben nach Vorigem $\frac{n - 1 . n - 2}{1 . 2}$ Amben, und hiemit a verbunden, eben so viele Ternen. Aber dies gilt von jedem der n Buchstaben, wodurch also n mahl so viel, also $\frac{n . n - 1 . n - 2}{1 . 2}$ Ternen entstehen, worinn jeder 3 mahl vorkömmt, als abc, bac, cab, die aber nur für eins gelten, daß also obgedachte Zahl noch mit 3 zu dividiren, folglich die Zahl der Ternen ohne Versetzungen $= \frac{n . n - 1 . n - 2}{1 . 2 . 3}$ ist. Eben so wird gezeigt, daß n Dinge ohne Versetzungen $\frac{n . n - 1 . n - 2 . n - 3}{1 . 2 . 3 . 4}$ Quaternen, oder Combinationen nach 4 geben. Nach dieser Analogie ist also allgemein von n Dingen die Zahl der Combinationen nach m ohne Versetzungen $= \frac{n . n - 1 \ldots n - (m - 1)}{1 . 2 . \ldots . m}$.

Z. E. 1) In den 5 Dingen §. 128. stecken $\frac{5 . 4 . 3}{1 . 2 . 3} = 10$ Ternen. Oder: in einem Triangel

sind

sind 3 Winkel F, B, C, und 3 Seiten, die nach den gegen über liegenden Winkeln a, b, c heißen sollen. In diesen 6 Dingen stecken $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ Ternen, oder so viel verschiedene Aufgaben, aus 3 Dingen die übrigen zu bestimmen, wovon blos der Fall ABC untauglich ist:

abc, abA, abB, abC	bcA, bcB, bcC	cAB, cAC
acA, acB, acC,	bAB, bAC	cBc
aAB, aAC	bBC	ABC

2) Beym Lombre kann jeder der 3 Spieler beym Chartengeben so viel verschiedne Spiele bekommen, als 40 Charten Combinationen nach 9 geben, d.i. $\frac{40 \cdot 39 \cdots 32}{1 \cdot 2 \cdots 9} = 273\,438\,880$, so daß niemahls alle 9, die er einmahl bekömmt, mit allen 9, die er ein andermahl bekömmt, einerley sind. Die gefundne Zahl muß noch mit 3 multiplicirt werden, weil eben die Charten ein andres Spiel geben, nachdem es in der 1. 2. 3. Hand ist.

Die Wahrscheinlichkeit, ob unter den gegebenen Charten beyde Aß sind, findet man aus Vergleichung der Amben, welche alle 40 Charten, und derer, welche 9 Charten, die man in Händen hat, geben. Diese sind $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$; jene $\frac{40 \cdot 39}{1 \cdot 2} = 780$. Hienach ist die Wahrscheinlichkeit 36 : 780 oder 1 : $21\frac{1}{3}$, also etwa $\frac{1}{21}$.

Hat man die beyden Aß nicht bekommen, und verlangt sie zu kaufen: so beruhet dies

a) auf der Wahrscheinlichkeit, daß sie sich unter den 13 liegenden Blättern befinden. Da man sie nicht unter den 9 in der Hand hat: so müssen sie

sie unter den übrigen 40—9 oder 31 Charten seyn, wovon 13 liegen geblieben. Nun ist $\frac{31.30}{1.2} = 465$, und $\frac{13.12}{1.2} = 78$. Folglich ist obige Wahrscheinlichkeit $= \frac{78}{465}$.

b) auf der Wahrscheinlichkeit, daß sie sich unter den n obern Charten, die man kauft, befinden. Nun ist die Menge der Amben in den n obern Charten $\frac{n.n-1}{1-2}$ und in den 13 liegenden $\frac{13.12}{1-2} = 78$. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{n.n-1}{1-2}$. Z. E. wenn man 6 Charten kauft, $\frac{6.5}{1.2}$, oder höchstens 9 Charten, $\frac{9.8.}{1.2}$.

c) auf der Zusammensetzung beyder; da dann die ganze Wahrscheinlichkeit $= \frac{n.n-1}{1.2} \cdot \frac{78}{465}$ ist. Jedoch gehet diese Rechnung blos auf den Fall, wenn man zuerst kauft.

3) Das Lotto di Genua ist gewöhnlich so eingerichtet, daß von 90 Nummern jedes mahl nur 5 gezogen werden, und für einfache bestimmte oder unbestimmte Auszüge, Amben, Ternen, Quaternen, Quinen, wenn die Einheit bey jeder Spielart mit C besetzt wird, die Gewinnste sind: 15 C, 75 C, 275 C, 5000 C, 60000 C, 100000 C. Auf welche Art hierüber die Rechnung zu führen sey, soll an den 3 ersten Spielarten gezeigt werden, woraus sich die Methode für die übrigen ergiebt.

a) Da von den 90 Nummern nur 5 herauskommen: so ist die allgemeine Wahrscheinlichkeit, einen einfachen Auszug zu errathen, $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ und für

für n besetzte Nummern, $\frac{n}{18}$, folglich die wahrscheinliche Ausbeute $\frac{n}{18} \cdot 15\,C = \frac{15}{18} \cdot n\,C$ gegen den Einsatz n C.

b) Da von den 90 Nummern nur 1 bestimmte herauskömmt: so ist die allgemeine Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{90}$, und für n besetzte Nummern, $\frac{n}{90}$, folglich die wahrscheinliche Ausbeute $\frac{n}{90} \cdot 75\,C = \frac{75}{90} \cdot n\,C$ gegen den Einsatz n C.

c) Da in 90 Nummern $\frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$ Amben, und in den 5 gezogenen $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, so ist die allgemeine Wahrscheinlichkeit $\frac{10}{4005} = \frac{1}{400}$. und für $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}$ besetzte Amben, $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{400}$, folglich die wahrscheinliche Ausbeute $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{400} \cdot 275\,C$ $= \frac{275}{400} \cdot \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}\,C$. gegen den Einsatz $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \cdot C$.

§. 145. Aufgabe. Man soll die Combinationen nicht nur mit Versetzungen finden, sondern auch so, daß jeder Buchstabe a, b, c, d, e . . . mehr als ein mahl vorkömmt, z. E. in den Amben doppelt; in den Ternen doppelt und dreyfach; in den Quaternen zwey, drey und vierfach u. s. w.

Auflösung. 1) Für Amben paare man jeden dieser Buchstaben mit allen 5: so hat man jedes mahl 5 Amben, und diese so viel mahl, als Buchstaben sind, also $5 . 5 = 5^2$ Amben.

aa,	ab,	ac,	ad,	ae.
ba,	bb,	bc,	bd,	be.
ca,	cb,	cc,	cd,	ce.
da,	db,	dc,	dd,	de.
ea,	eb,	ec,	ed,	ee.

2) Für Ternen mache man erst die Amben, 5 . 5 und verbinde mit jeder jeden Buchstaben. Dies giebt $5 (5 . 5) = 5^3$ Ternen.

3) Für Quaternen verbinde man jeden Buchstaben mit jeder der 5^3 Ternen. Dies giebt $5 . 5^3 = 5^4$ Quaternen.

4) Nach dieser Analogie geben n Dinge nach m combinirt n^m Combinationen. Z. E.

a) Für die Zahl der Schlußarten, modi syllogismorum, geben die 4 Arten der Sätze a, e i, o, $4^2 = 16$ Amben zu Prämissen, wovon ee, eo, ii, io, oe, oi, oo, untauglich, weil sie entweder blos particulär, oder blos verneinend sind. Die übrigen geben, weil sich die Conclusion nach dem schwächern Theile richtet, die Schlußarten: aaa, aee, aii, aoo, eae, eio, iai, ieo, oao. Hiezu kömmt noch: aeo, aai, eao.

aa,	ae,	ai,	ao.
ea,	ee,	ei,	eo.
ia,	ie,	ii,	io.
oa,	oe,	oi,	oo.

b) In dem Decadischen Zahlensysteme werden von den 10 Zahlzeichen, die Null mitgerechnet, alle mögliche Combinationen gemacht, welches Hr. Prof. Hindenburg (novi systematis permutationum, combinationum ac variationum primae lineae etc. Lipsiae 1781. 4.) vortreflich benutzt hat. Einfache Zahlen sind nur 9, weil 0 nichts gilt. Für die Amben setze man den 10 Zahlzeichen ein jedes vor; dies giebt 10. 10 Amben, und weil die 0

vorn

vorn nichts gilt, nur 9.10 = 90. Für die Ternen setze man den 100 Amben jedes Zahlzeichen vor; dies giebt 10. 100 Ternen, und weil die 0 vorn nichts gilt, nur 9. 100 = 900. Für die Quaternen setze man den 1000 Ternen jedes Zahlzeichen vor; dies giebt 10. 1000, und wegen der 0, nur 9. 1000 = 9000 u. s. w.

V.

Elementargeometrie.

§. 146.

Wenn (Plan. Fig. 27) DAB + CBA = 2R, folglich DF, BE, parallel sind, und man in BE einen beliebigen Punkt C nimmt, und AC ziehet: so ist CAD um desto kleiner, je weiter der angenommene Punkt C von B abliegt, wodurch sich CA, die um A gedrehet wird, immer mehr der AD nähert, und endlich auf AD fällt. Ehe dieses geschiehet, muß der angenommene Punkt C weiter von B gerückt, und der Winkel CAD kleiner geworden seyn, als sich angeben läßt. Denn gesetzt, man gebe eine Entfernung, welche man will, BE, und den zugehörigen Winkel EAD an: so kann man einen Punkt über E hinaus annehmen, wodurch man eine noch größere Entfernung, und einen noch kleinern Winkel erhält, als angegeben ward.

Sind demnach CAB + CBA < DAB + CBA d. i. < 2R, wenn auch gleich dieser Unterschied weniger beträgt, als angegeben werden kann: so trift AC mit BE zusammen.

Dies ist der Satz von der Convergenz gerader Linien (Plan. §. 83. Fig. 25.) nach des Herrn Hofrath Kästners Beweise, dem einzigen befriedigenden unter allen, die wenigstens mir bekannt sind.

§. 147. Drehet sich demnach die Linie AB (Plan. Fig. 25.) um G, daß BGK immer kleiner wird, und verschwindet, wenn AB auf LK fällt: so muß, ehe dieses geschiehet, ihr Durchschnittspunkt mit CD über alle Gränzen hinausgerückt seyn (unendlich weit von H, so daß, wenn m. GH solche Weite ausdrücken soll, gar keine Zahl für m sich angeben läßt, d. i. m unendlich groß ist, welches man durch (∞) anzeigt.) Drehet sich hierauf AB noch weiter um G, daß GB über GK; GA unter GL liegt: so schneidet BA die DC auf jener Seite von H, daß die Weite von H nach D, und die von H nach C zu, einander entgegengesetzt, oder jene bejaht, diese verneint sind. Hieraus siehet man, daß der Uebergang aus dem vorher wachsenden Bejahten in das nun abnehmende Verneinte durch das Unendliche, d. i. durch die ohne Ende wachsende HD, HC geschehe. Drehete sich aber AB auf die andere Art, daß das Bejahte ab- und das Verneinte zunähme: so geschähe der Uebergang aus dem Bejahten in das Verneinte durch die Verschwindung, oder einen Durchgang durch Null.

§. 148. Triangel, so auch Parallelogramme, von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundlinien. (Plan. §. 208. Fig. 62.) Denn

1) die Linien BC, CD, sind commensurabel; d. i. es giebt ein Maaß BG, das in beyden nach ganzen Zahlen m, n, enthalten ist, daß BC = m. BG, und CD = n. BG, folglich BC : CD = m : n. Nun

geben

geben die Theile in BC, CD, ähnliche Theile in den Triangeln, was auch für ein Maaß BG angenommen sey. Folglich ist $\triangle ABC = m \triangle ABG$, und $\triangle ACD = n . \triangle ABG$, folglich $\triangle ABC : \triangle ACD = m : n = BC : CD$.

2) Die Linien BC, CD, sind incommensurabel, d. i. bey jedem Maaße BG ist immer $BC = m . BG$, aber $CD > n . BG$ und $< (n+1) BG$. Folglich ist $\frac{CD}{BC}$ von dem Quotienten $\frac{n}{m}$ noch nicht um $\frac{1}{m}$, folglich (da dieses durch immer fortgesetzte Halbirungen der BG kleiner als jede Größe, die sich angeben läßt, gemacht werden kann (Plan. §. 195.) um etwas, das sich nicht angeben läßt, unterschieden, d. i. es ist $\frac{CD}{BC} = \frac{n}{m}$, oder BC : CD einer rationalen Verhältniß m : n gleich. Nun geben die Theile in BC, CD, bey jedem angenommenen Maaße BG, ähnliche Theile in den Triangeln. Daher ist nach den vorigen Schlüssen $\triangle ABC : \triangle ACD$ derselben rationalen Verhältniß m : n gleich. Folglich ist auch hier $\triangle ABC : \triangle ACD = BC : CD$.

§. 149. Aus dem Beweise §. 148. erhellet, daß zwey Paar Größen, deren jedes von einerley Art ist, proportionirt sind; wenn bey dem einen Paare irgend ein Maaß in der einen Größe etliche mahl ohne Rest, in der andern etliche mahl ohne oder mit einem Reste enthalten ist: und dieses bey dem andern Paare mit jedem der angenommenen Maaße auf einerley Art und nach gleichen Zahlen statt findet.

Anmerkung. Auf diese Art kann man den Schwierigkeiten, welche incommensurable Größen machen, bequem aus dem Wege gehen. Euklides hat hiezu eine andere Erklärung der Proportion für nöthig erachtet, welche in den Figuren sowohl, als in den Beweisen selbst, etwas beschwerlich fällt. Im ersten Theile des Grundrisses enthält (Einleitung §. 60. Anmerk.) einen Vorschlag, wie dieser Beschwerde etwa abzuhelfen sey.

§. 150. Wenn BG, oder △ ABG in §. 148. ohne Ende abnimmt, so nimmt m ohne Ende zu; und es giebt von beyden kein letztes, weil die Veränderung ohne Aufhören fortgehet. Wenn man sich aber $\frac{1}{m}$ BC oder $\frac{1}{m}$ △ ABC als ein letztes gedenken will: so muß man solches kleiner, als jedes, was sich angeben läßt, d. i. als unendlich klein annehmen. Alsdann nennt man es ein Element der zugehörigen Größe, und siehet es als ein Element der zugehörigen Größe, und siehet es als ein Maaß von ihr an, welches sie ganz genau ausmißt, weil der Fehler noch nicht völlig ein Element betragen kann. Diese Ausdrücke zeigen also nichts anders an, als dergleichen Schlüsse, wie §. 148, die dadurch ins Kurze zusammengefaßt werden. Was aber hier von geraden Linien und geradlinichten Flächen gezeigt worden, gilt eben so auch von krummen Linien und krummlinichten Flächen, wie auch von den Körpern. Denn alle dergleichen Größen lassen sich auf Verhältnisse gerader Linien bringen.

§. 151. Siehet man also alle Größen einerley Art (d. i. da ein multiplum der einen die andere übertreffen, oder da ein submultiplum der einen kleiner als die andere werden kann) in der Bedeutung

deutung §. 148. als commensurabel an: so kömmt es bey der wirklichen Ausmessung bloß darauf an, die Theile einer Größe genugsam klein zu machen. Hiezu brauchte man sonst die Transversallinien (Plan. §. 245.), jetzt besser den Vernier oder Nonius (Plan. §. 273. num. 4.), dessen Einrichtung und Gebrauch auf folgenden Gründen beruhet:

Theilt man von zwey gleichen geraden oder Kreislinien die eine in n Theile, deren einer a, die andre in $n - 1$ Theile, deren einer x: so ist $na = (n-1)x$, folglich $n - 1 : n = a : x$, folglich $n - 1 : 1 = a : x - a$ (Arithm. §. 169.), folglich $x - a = \frac{1}{n-1} . a$. Z. E. es sey $a = 1$ Grad, $n = 21$: so ist $x - a = \frac{1}{20}$ Grad $= 3$ Min. Oder es sey $a = 1$ Zoll, $n = 13$: so ist $x - a = \frac{1}{12}$ Zoll $= 1$ Linie.

§. 152. Von 3 Rectangeln P, Q, R, seyen nach der Ordnung die Grundlinien b, b, β, die Höhen a, α, α: so ist $P : Q = a : \alpha$ (Plan. §. 209.) $Q : R = b : \beta$ (Plan. §. 208.), folglich $P : R = ab : \alpha\beta$ (Ar. §. 175.) $= (a : \alpha) + (b : \beta) = (a : b) + (\alpha : \beta)$ §. 57., wo man ein Maaß für die Glieder dieser Verhältnisse nach Gefallen annehmen kann.

Ist demnach ABCD (Plan. §. 247. Fig. 79.) $= P$ und $EF = R$: so ist $ABCD : EF = AB . AD : AE . AF$, und wenn $AE = AF = 1$ gesetzt wird, $ABCD : EF = AB . AD : 1$, d. i. so vielmahl die Einheit in dem Producte AB . AD steckt, so oft steckt EF in ABCD.

§. 153. Setzt man (Plan. §. 258.) $ab = x^2$: so ist $a : x = x : b$ und $x = \mp \sqrt{ab}$, welches man auch

nach (Plan. §. 220. Fig. 67.) durch eine geometrische Zeichnung, Construction, findet, wodurch also x, auch wenn es irrational ist, durch eine Linie genau gefunden wird; da auch $-x$ entsteht, wenn man den Kreis vollendet, und das dort gefundne x nach der entgegengesetzten Seite verlängert.

§. 154. Ist der Inhalt eines Triangels p, und seine Grundlinie b gegeben, und man soll seine Höhe a finden (Plan. §. 259.), so ist $p = \frac{ab}{2}$, folglich $\frac{2p}{b} = a$. Ist nun (Plan. Fig. 30.) $BC = b$, und man setzet $AB = \frac{2p}{b} = a$ auf BC senkrecht, und ziehet AF mit BC parallel: so liegen darinn die Spitzen unzähliger Triangel, welche alle BC zur Grundlinie und BA zur Höhe haben. Dies ist ein Beyspiel von unbestimmten Aufgaben §. 114. in der Geometrie. Von eben der Art wäre, wenn man einen rechtwinklichten Triangel finden sollte, dessen Hypotenuse AB (Plan. Fig. 67.) gegeben ist. Denn beschreibt man um AB einen Kreis: so ist jeder Punkt des Umkreises, wie E, die Spitze des verlangten Triangels. In jeder dieser beyden Aufgaben findet man also statt eines Punktes unzählige, die der Aufgabe ein Genüge leisten; und diese Punkte liegen entweder wie Plan. Fig. 30. in einer geraden Linie AF, oder wie Plan. Fig. 67. in einer krummen Linie AEB. Dergleichen Linie heißt ein geometrischer Ort, locus geometricus.

§. 155. Man setze (Plan. Fig. 81.) einen Kreisbogen $AEB = \alpha$, und seine Sehne $AB = S.\ \alpha$: so ist, wenn C des Kreises Mittelpunct, und CD

auf

auf AB senkrecht, AD $= \frac{1}{2}$ S. α, und AE oder S. $\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}$ S. α. Nun übertrift allemahl die Länge eines Bogen die ihm zugehörige Sehne um einen gewissen Unterschied, wovon folgendes statt findet:

I. $\frac{1}{2}\alpha - S.\frac{1}{2}\alpha < \frac{\alpha - S.\alpha}{2}$. Denn wäre α Sα = u, so wäre $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}S.\alpha = \frac{1}{2}u$. Nun ist $S.\frac{1}{2}\alpha > \frac{1}{2}S.\alpha$. Folglich ist $\frac{1}{2}\alpha - S.\frac{1}{2}\alpha < \frac{\alpha - S.\alpha}{2}$.

II. $\frac{\frac{1}{2}\alpha - S.\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha} < \frac{\alpha - S.\alpha}{\alpha}$. Denn der erste Bruch ist $= \frac{\alpha - 2S.\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}$, wo $2S\frac{1}{2}\alpha > S.\alpha$.

III. $\frac{\frac{1}{2}\alpha}{S.\frac{1}{2}\alpha} < \frac{\alpha}{S.\alpha}$. Denn der zweyte Bruch ist $= \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}S\alpha}$, wo $\frac{1}{2}S\alpha < S.\frac{1}{2}\alpha$. Jeder dieser Brüche ist > 1 (weil der Bogen größer als seine Sehne ist) aber der erste kömmt der 1 näher als der zweyte, folglich $\frac{1}{2}\alpha : S\frac{1}{2}\alpha$ der Verhältniß $1:1$ näher, als $\alpha : S.\alpha$.

Nun bedeute m eine gegebene Linie, so klein man will: so läßt sich allemahl ein Bogen finden, der seine Sehne um weniger als m übertrift. Denn es sey $\alpha - S.\alpha = u$. Ist nun $u < m$, so ist das verlangte geschehen. Ist aber $u =$ oder $> m$: so erhält man durch fortgesetzte Halbirungen Bogen, die von ihren Sehnen weniger als $\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{4}u$, $\frac{1}{8}u$ . . . . . . unterschieden sind, (I.) folglich gewiß $\frac{1}{n}u < m$. (Plan. §. 195.)

Hiedurch ist also ein Bogen $\frac{1}{n}\alpha$ gefunden, der seine Sehne $S.\frac{1}{n}\alpha$, um weniger als $\frac{1}{n}u$ übertrift; aber hieraus folgt noch nicht, daß $\frac{\frac{1}{n}\alpha}{S.\frac{1}{n}}$ der Einheit, folglich $\frac{1}{n}\alpha : S.\frac{1}{n}\alpha$ der Verhältniß 1 : 1 so nahe, als man nur will, gekommen sey. Denn da mit der Abnahme des Unterschiedes, zugleich auch der Bogen abgenommen hat: so könnte es wohl möglich seyn, daß $\frac{1}{n}\alpha : S\frac{1}{n}\alpha$ von 1 : 1 doch noch merklich unterschieden wäre, wenn z. E. obiger Unterschied nur noch ein Milliontheilchen eines Zolles betrüge, der Bogen selbst aber nur noch 10 solcher Theilgen lang, folglich $\frac{1}{n}\alpha : S\frac{1}{n}\alpha = 10:9$ wäre, wofür man gewiß nicht 1 : 1 setzen darf.

Zwar zeigt (II) allerdings, daß durch obiges Verfahren der Unterschied nicht nur kleiner, sondern auch gegen seinen Bogen weniger beträchtlich geworden, und daß $\frac{\frac{1}{n}\alpha - S.\frac{1}{n}\alpha}{\frac{1}{n}\alpha}$ immer kleiner und kleiner werde; aber hieraus folgt noch nicht, daß er auch kleiner, als jeder gegebene Bruch werden müsse, indem zwischen 2 Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sich unzählige Brüche setzen lassen, die immer kleiner als der erste werden, und doch stets größer als der zweyte bleiben.

Auch

Auch zeigt (III) allerdings, daß $\frac{\frac{1}{n}\alpha}{S.\frac{1}{n}\alpha}$ der Einheit immer näher und näher komme; aber hieraus folgt noch nicht, daß dies auch so nahe, als man will, geschehe. Denn in dem Quotienten $\frac{3,6+x}{3}$, nehme x immer ab, selbst bis auf nichts: so nähert er sich immer mehr der Einheit, aber doch nicht weiter, als bis an 1, 2.

Zeigte aber $\frac{1}{n}\alpha$ einen Bogen an, der durch unendlichmahl wiederhohlte Halbirungen erhalten wäre, daß ganz genau $\frac{1}{n}\alpha = S.\frac{1}{2}\alpha$: so wäre $\frac{\frac{1}{n}\alpha - S.\frac{1}{n}\alpha}{\frac{1}{n}\alpha} = 0$, und $\frac{\frac{1}{n}\alpha}{S.\frac{1}{n}\alpha} = 1$. Diesen Zustand kann man nun durch immer fortgesetzte Halbirungen, so groß auch ihre Anzahl seyn mag, niemals erreichen, demselben aber doch immer näher, und so nahe man will, kommen, folglich $\frac{\frac{1}{n}\alpha - S.\frac{1}{n}\alpha}{\frac{1}{n}\alpha}$ dem Werthe 0 und $\frac{\frac{1}{n}\alpha}{S\frac{1}{n}\alpha}$ der Einheit immer näher und so nahe man will, bringen.

Anmerkung. Der ausführliche Vortrag des Herrn Hofr. Kästners (Mathem. Anfangsgr. I. Th. 1. Abth. 41r Satz) der zuerst diese Materie so lehrreich entwickelt hat, ist

hier

hier ins Kurze zusammengebracht, und dem letztern Theile nach nur angedeutet worden; welches vielleicht dienen kann, denselben im Ganzen leichter zu übersehen.

§. 156. Ist (Plan. §. 265. Fig. 81) des Kreises Halbmesser CA $= r$, und die Seite AB $= a$ eines regulären Polygons von n Seiten gegeben, und man will hieraus die Seite AE $= b$ eines andern von 2n Seiten finden: so ist AD $= \frac{1}{2}a$, $CD^2 = r^2 - \frac{1}{4}a^2$, $DE^2 = (r - CD)^2 = r^2 - 2r.CD + CD^2 = r^2 - 2r.CD + r^2 - \frac{1}{4}a^2$; folglich $b^2 = AD^2 + DE^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - 2r.CD + r^2 - \frac{1}{4}a^2 = 2r^2 - 2r.CD$, und $b = \sqrt{(2r^2 - 2r.CD)}$ wo $CD = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$.

In diesen Gleichungen setzt man anstatt a, die vorhergefundne b, und findet also daraus c die Seite eines Polygons von 4n Seiten, u. s. w. wodurch man sich der Kreislinie, so weit man will, nähern kann. §. 155.

Z. E. $r = 1$, und $n = 6$, so ist $a = r = 1$, und $CD^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, folglich $CD = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}7320508\ldots}{2}$, folglich eines 12seitigen Polygons Seite $b = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 0{,}51763809\ldots$. Setzt man diesen Werth von b in obige Gleichungen anstatt a: so findet man c die Seite eines 24seitigen Polygons u. s. w.

§. 157. Setzt man die Ludolphische Zahl (Plan. §. 267.) $= \pi$, und eines Kreises Durchmesser $= d$, oder Halbmesser $= r$: so findet man (Plan. §. 268) dessen Umfang p und Innhalt a, wenn man setzt $1 : \pi = d : p$, folglich $p = d\pi = 2r\pi$, und $a = d\pi . \frac{d}{4} = \frac{d^2\pi}{4} = r^2\pi$.

§. 158.

§. 158. Für die Ausmessungen prismatischer und prismenartiger Körper (Ster. §. 121) sey

1) P der Innhalt eines Parallelepipedons, und a, b, c, seine Höhe, Breite, Länge: so ist $P = abc$, oder eigentlich, wenn Π, α, β, γ, das ähnliche anzeigen, $P : \Pi = abc : \alpha\beta\gamma$. vergl. §. 152.

Ein Würfel, dessen Seite q, ist also q^3. Setzt man diesen einem Parallelepipedon P gleich (Ster. §. 125.) so ist $q^3 = abc$, folglich $q = \sqrt[3]{abc}$. Will man die Seite x eines Würfels, der n mahl so groß, als ersterer sey: so ist hier $x^3 = nq^3$, folglich $x = q\sqrt[3]{n}$, mehr als das Delische Problem verlangte.

2) C der Inhalt eines Cylinders, a seine Höhe, d und r der Durchmesser und Halbmesser seiner Grundfläche: so ist $C = ar^2\pi = \frac{ad^2\pi}{4}$, folglich, wenn Γ, α, δ, ϱ, das ähnliche bedeuten, $\Gamma = \alpha\varrho^2\pi = \frac{\alpha\delta^2\pi}{4}$, und daher die Röhre V (in Ster. §. 126) $= ar^2\pi - \alpha\varrho^2\pi = a\pi(r^2 - \varrho^2)$

Eigentlich ist $C : \Gamma = ar^2\pi : \alpha\varrho^2\pi = ar^2 : \alpha\varrho^2$. Setzt man hier $\alpha = na$, und $\varrho = mr$, so ist $C : \Gamma = ar^2 : nam^2r^2 = 1 : n.m^2$, folglich (für Ster. §. 127) $\Gamma = nm^2.C$.

§. 159. Für die Ausmessung der Pyramiden, und pyramidenartigen Körper (Ster. §. 129.) sey

1) die Grundfläche der Pyramide B, die Höhe a: so ist ihr Innhalt $= \frac{1}{3}a.B$.

2) Γ

2) r der Halbmesser der Grundfläche, und a die Höhe eines Kegels: so ist dessen Inhalt $= \frac{1}{3} a . r^2 \pi$.

§. 160. Soll ein Kegel in einen Cylinder verwandelt werden, dessen Höhe α gegeben ist: so findet man dessen Halbmesser ϱ, wenn man setzt $\frac{a r^2 \pi}{3} = \alpha \varrho^2 \pi$, folglich $\frac{a r^2}{3 \alpha} = \varrho^2$ und $r \sqrt{\frac{a}{3 \alpha}} = \varrho$.

§. 161. Für abgekürzte Kegel und Pyramiden (Ster. §. 132. Fig. 106. 104) setze man

1) beym senkrechten Kegel, $CD = r$, $EG = \varrho$, $CE = a$: so ist $CD : EG = AC : AE$, folglich $CD - EG : EG = CE : AE$, d. i. $r - \varrho : \varrho = a : \frac{a \varrho}{r - \varrho}$; und $CD - EG : CD = CE : AC$, d. i. $r - \varrho : r = a : \frac{a r}{r - \varrho}$. Demnach ist der ganze Kegel $ABK = \frac{r^2 \pi}{3} . \frac{a r}{r - \varrho} = \frac{r^3}{r - \varrho} . \frac{a \pi}{3}$; und der abgeschnittene $AFH = \frac{\varrho^2 \pi}{3} . \frac{a \varrho}{r - \varrho} = \frac{\varrho 3}{r - \varrho} . \frac{a \pi}{3}$, folglich der abgekürzte $FHKB = \frac{r^3 - \varrho^3}{r - \varrho} . \frac{a \pi}{3}$.

2) Bey der senkrechten Pyramide, $MN = a$, und $BA : EF = m : n = MK : NK$, so ist $BA - EF : EF = MN : NK$, das ist $m - n : n = a : \frac{an}{m - n}$; und $BA - EF : BA = MN : MK$, d. i. $m - n : m = a : \frac{am}{m - n}$. Nun sey die untre Grundfläche der abgekürzten Pyramide $= b$, die obere $= \beta$: so ist $m^2 : n^2 = b : \beta$, folglich $\beta =$

$b n^2$

$\frac{bn^2}{m^2}$. Demnach ist die ganze Pyramide = $\frac{b}{3} \cdot \frac{am}{m-n} = \frac{b \cdot am^3}{3 \cdot (m-n) m^2}$; die abgeschnittene $\frac{b}{3} \cdot \frac{n^2}{m^2} \cdot \frac{an}{m-n} = \frac{ban^3}{3(m-n) m^2}$; folglich die abgekürzte $\frac{m^3 - n^3}{m^2 (m-n)} \cdot \frac{ab}{3} \cdot = (1 - \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}) \cdot \frac{ab}{3}$.

§. 162. Die Seitenflächen der Körper (in Ster. §. 153.) sind, und zwar

1) des senkrechten Prisma = ap; wo a die Höhe, und p der Durchmesser der Grundfläche ist.

2) des senkrechten Cylinders = $ad\pi$; wo a die Höhe, und d der Durchmesser der Grundfläche ist.

3) einer Pyramide mit ähnlich geneigten Seitenflächen = $\frac{k}{2} \cdot p$; wo p der Umring der Grundfläche, und k ein Perpendikel von der Spitze auf eine Seite des Umringes ist.

4) des senkrechten Kegels = $\frac{k}{2} \cdot d\pi = kr\pi$, wo k die Seite des Kegels, und d der Durchmesser r der Halbmesser der Grundfläche ist.

§. 163. Ein Kreis, dessen Halbmesser ϱ, sey gleich der krummen Oberfläche

1) eines senkrechten Cylinders: so ist $ad\pi = \varrho^2\pi$, oder $ad = \varrho^2$, folglich $a : \varrho = \varrho : d$.

2) eines senkrechten Kegels: so ist $kr\pi = \varrho^2\pi$, oder $kr = \varrho^2$, folglich $k : \varrho = \varrho : r$.

§. 164. Ist r der Halbmesser einer Kugel: so ist

1) Ster. §. 134. die Oberfläche der halben Kugel $= r\,d\,\pi = 2r^2\pi$ folglich der ganzen $= 4r^2\pi = d^2\pi = dp = \frac{p^2}{\pi}$ §. 157; und eines Stücks, dessen Höhe $y, = y \cdot d\pi$.

2) Ster. §. 138. der Inhalt der Kugel $S = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3} r^3\pi = \frac{d^3\pi}{6} = \frac{2}{3}$ C §. 158.

§. 165. Soll ein Cylinder $ar^2\pi$ in eine Kugel, deren Halbmesser ϱ man sucht, verwandelt werden: so ist $ar^2\pi = \frac{4}{3}\varrho^3\pi$, oder $ar^2 = \frac{4}{3}\varrho^3$, folglich $\frac{3}{4}ar^2 = \varrho^3$, und $\sqrt[3]{\frac{3ar^2}{4}} = \varrho$.

Wären r und ϱ die Halbmesser zweyer Kugeln S und nS: so hat man $S : nS = r^3 : \varrho^3$, folglich $\varrho^3 = nr^3$, und $\varrho = r\sqrt[3]{n}$; worauf sich der Kaliberstab (Geschützkunst §. 14.) gründet.

§. 166. Aehnliche Körper verhalten sich (Ster. §. 139.) wie die Würfel ähnlich liegender Linien. Denn sind

1) die Prismata P, Π, §. 158. ähnlich: so ist nach (Ster. §. 48. und Plan. §. 205) $a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$. folglich ist $P : \Pi = abc : \alpha\beta\gamma = (a : \alpha) + (b : \beta) + (c : \gamma) = 3\ (a : \alpha) = a^3 : \alpha^3 = b^3 : \beta^3 = c^3 : \gamma^3$.

Die Pyramiden, als Drittheile der Prismen, verhalten sich wie die Prismen.

2) Die Cylinder C, Γ, §. 158. ähnlich: so ist (Ster. §. 56.) $a : \alpha = r : \varrho$. Folglich ist $C : \Gamma = ar^2 : \alpha\varrho^2 =$

(a : α

$(a:\alpha) + (r:\varrho) + (r:\varrho) = 3\,(r:\varrho) = r^3:\varrho^3 = a^3:\alpha^3$.

Die Kegel, als Drittheile der Cylinder, verhalten sich wie die Cylinder.

§. 167. Die im Obigen vorkommenden Producte aus Linien, sind zwar an sich selbst nur Linien (Plan. §. 248.) und bedeuten zusammengesetzte Verhältnisse der Linien §. 57; können aber in dem Sinne §. 152. 158. Flächen und Körper vorstellen. Denn so wie bey einem angenommenen Maaße eine Linie durch eine Zahl ausgedruckt werden kann, welche die Menge der darinn enthaltnen Einheiten anzeigt; so zeigt das Product aus zwey oder drey Linien die Menge der in einer Fläche oder einem Körper enthaltnen Quadrate oder Würfel an, die zu Maaßen angenommen sind. Demnach kann man den Ausdruck $\frac{ab}{b} = a$ und $\frac{abc}{bc} = a$ und $\frac{abc}{c} = ab$, als den Quotienten ansehen, den eine Fläche mit einer Linie, und ein Körper mit einer Fläche oder Linie dividirt giebt; folglich den ersten und zweyten als eine Linie, den dritten als eine Fläche; weil die Fläche als ein Product aus zwey Linien, der Körper als ein Product ans drey Linien, oder aus einer Fläche und Linie entsteht. Denn obgleich $\frac{a}{c}$, der Quotient aus Linien, eigentlich ihre Verhältniß anzeigt, also eine unbenannte Zahl ist: so kann er doch auch eine Linie oder Fläche ausdrucken, die aus dem angenommenen Maaße so entsteht, wie diese unbenannte Zahl aus der Einheit. Daher bedeutet ein Product aus dem Quotienten $\frac{a}{c}$ in eine Linie b, nichts anders als eine Linie, die sich zu b so verhält,

wie $\frac{a}{c}$: 1; und ein Product aus dem Quotienten $\frac{a}{c}$ in eine Fläche bd, oder Körper bdg, nichts anders, als Flächen oder Körper, die sich zu bd, bdg so verhalten, wie $\frac{a}{c}$: 1.

Nennt man daher Abmessungen, oder Dimensionen eines Products aus Linien, die Menge seiner Factoren: so fodert ein Körper deren drey, eine Fläche zwey, eine Linie nur eine; einer Zahl aber, wie $\frac{a}{c}$, oder $\frac{ab}{ce}$, wird gar keine Abmessung zugeschrieben. (Jedoch giebt es auch noch höhere Abmessungen als für Körper, denen keine eigene Arten der Ausdehnung zugehören können.) Sollen demnach Producte aus Linien mit einander verglichen, oder zusammengesetzt werden: so müssen sie beyderseits gleiche Dimension haben, oder durch Verbindung einer ihnen gemäßen Einheit dazu gebracht werden. Z. E. bce + fg läßt sich nicht gedenken, aber wohl wenn man setzt bce + fgh, wobey h ein gewisses Maaß als Einheit bedeutet. Ein solches Maaß, oder eine solche Einheit h muß sich auch bey jeder Linie b hinzugedenken, daß b eigentlich h : b, und $b^3 = 3\ (b : h)$ ist.

§. 168. Es ist aber nicht genug, die Linien allgemein durch Buchstaben auszudrucken, sondern man muß auch ihre oft entgegengesetzte Lage zugleich mit durch die Zeichen + und — andeuten. Ob nun gleich die Regeln für entgegengesetzte Größen allgemein sind, also auch auf ausgedehnte Größen unmittelbar angewendet werden können: so ist es doch Anfängern nicht undienlich, sich hier durch

Plan

Plan. §. 218. vergl. Arithm. §. 156. alles augenscheinlich zu machen.

§. 169. Endlich sind bey Berechnung ausgedehnter Größen auch noch Kunstgriffe nöthig, die Winkel, und die Neigungen der Ebenen, oder die Lagen einer Linie gegen eine andere, oder gegen eine Ebene, und die Lagen der Ebenen gegen einander geschickt auszudrücken, und mit in Rechnung zu bringen, daß man z. E. (Plan. §. 262. Fig. 81.) anstatt des Winkels ACE, die Verhältniß AC:AD, oder CD:AD; oder auch die Quotienten $\frac{AD}{AC} \cdot \frac{AD}{CD}$, setzen und bestimmen könne. Dergleichen Kunstgriffe lehrt die Trigonometrie.

VI.

Ebene Trigonometrie.

§. 170.

Erklärung. Der Sinus eines Bogens AB (Fig. 1.) ist der Perpendikel BE, der von einem seiner Endpunkte B, auf den durch den andern Endpunkt A gehenden Durchmesser AD fällt.

§. 171. Der Sinus BE eines Bogens AB ist die halbe Sehne BF des doppelten Bogens BAF. (Plan. §. 135. 178.) z. E. für BAF = 60°, ist sin 30° = ½ CB; für BAF = 90°, ist sin 45° =

CB. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Durch Halbirungen der Bogen lassen sich auch eine Menge Chorden und Sinus finden. Z. E. chord 30° aus chord 60, chord 45° aus chord 90°, da dann $\frac{1}{2}$ chord 30° = sin 15°, $\frac{1}{2}$ chord 45° = sin 22$\frac{1}{2}$° u. s. w.

§. 172. Zwey Bogen AB, DGB, die zusammen 180° ausmachen, haben völlig einerley Sinus BE. Eben dies gilt auch von zwey Bogen AB und AGL (= 180° — AB) die von einem Quadranten AG auf beyden Seiten gleich viel abweichen; weil alsdann DL = AB, folglich LG = GB, und LK = BE ist. Aber für zwey Bogen AGL und AGDM, (wo DM = DL) die von 180 Grad auf beyden Seiten gleich viel abweichen, sind die Sinus LK, MK, zwar gleich groß, aber einander entgegengesetzt, daß wenn jener bejaht ist, dieser, der auf die entgegengesetzte Seite des Durchmessers AD fällt, verneint wird. Eben dies gilt auch von einem Bogen AGDHF, der über 3.90 d. i. über 270 Grad ist, weil FE, BE einander gleich, aber entgegengesetzt sind.

§. 173. Nennt man AG, GD, DH, HA, den 1. 2. 3. 4ten Quadranten, und läßt die Sehne BF, doch so, daß sie stets senkrecht auf AD bleibt, von A nach D, und von D zurück nach A rücken, so fällt in die Augen: daß die Sinus im 1sten Quadranten von 0 an bis zum Halbmesser wachsen; im 2ten von da an bis zu 0 abnehmen, und zwar beydes positiv; im 3ten Quadranten wieder von 0 an bis zum Halbmesser wachsen, und im 4ten von da bis zu 0 abnehmen, und zwar dieses beydes negativ.

Anmer-

Anmerkung. Eben dieselben Sinus bleiben, wenn man auch den ganzen Umkreis oder ein Vielfaches desselben zu irgend einem Bogen x addirte. Oder: $\sin x = \sin (n.\,360 + x.)$

§. 174. Der Halbmesser ist also der größte Sinus, und heißt, weil man alle übrige als Theile von ihm betrachtet, der Sinus totus.

§. 175. Eines Bogens AB Cosinus, heißt der Sinus BN seiner Ergänzung BG zum Quadranten; oder, weil CE = BN, das Stück des Halbmessers CE vom Mittelpunkte C an genommen, was sein Sinus BE abschneidet. Das übrige Stück des Halbmessers von A an genommen, heißt sein Quersinus, sinus versus.

§. 176. Bedeutet α einen Bogen, r den Halbmesser: so ist $\cos \alpha = \surd (r^2 - \sin \alpha^2)$ und $\sin.\ \mathrm{vers}\ \alpha = r - \cos \alpha$. (Aber $\cos.\ \mathrm{vers}\ \alpha = r - \sin \alpha$.)

3. E. $\cos 30^\circ = \surd (r^2 - \frac{1}{4} r) = \surd \frac{3 r^2}{4} = \frac{r \surd 3}{2}$,

folglich $\sin.\ \mathrm{vers}\ 30^\circ = r - \frac{r \surd 3}{3} = \frac{2 - \surd 3}{2}.r$.

§. 177. Bey den Größen der Bogen wie §. 172. ist cos AGL, so wie cos AGDM, = CK = — CE, aber cos AB, so wie cos AGDHF, = + CE.

§. 178. Rückt BF wie §. 173, so siehet man: daß die Cosinus im ersten Quadranten vom Halbmesser an bis zu o abnehmen, im 2ten von o an bis zum Halbmesser wachsen; jene positiv, diese negativ; und daß sie im 3ten Quadranten vom Halbmesser bis zu o abnehmen, im 4ten von o bis zum Halbmesser wieder wachsen; jene negativ, diese positiv.

§. 179. Der Quersinus in den beyden ersten Quadranten wächst von 0 bis zum Durchmesser, und nimmt von da in den beyden letzten Quadranten bis zu 0 wieder ab; bleibt aber stets bejahend, weil er immer von A bis zum Sinus gehet. Dies erhellet auch aus der Formel $\sin. \operatorname{vers}. \alpha = r - \cos. \alpha$. §. 176. 178.

§. 180. Gienge man in der Peripherie des Kreises von dem bisherigen Punkte A an nunmehr nach F, H, M, u. s. w. nach der entgegengesetzten Seite: so müßten die Bogen AF, AHM u. s. w. negativ heißen, wenn man die vorigen AB, AGL u. s. w. positiv nennt. Nimmt man nun von A an zu beyden Seiten zwey Bogen von gleicher Größe, wie AB, AF, und AGL, AHM, so fällt in die Augen: daß die Sinus solcher Bogen gleich, aber entgegengesetzt (des bejahten Bogens bejaht, des verneinten, verneint); daß der Cosinus beyder völlig derselbe, bejaht, oder verneint; und daß der Quersinus auch derselbe und immer bejaht sey.

§. 181. Erklärung. Eines Bogens AB Tangente, heißt die ihn in A berührende Linie AP, von solchem Punkte an, bis zu dem, wo sie von der durch C und B gelegten Linie CP, welche die Secante des Bogens heißt, begränzt wird.

§. 182. Ist $AB = 45°$, so ist $AP = AC$, folglich $\tan g. 45° = r$, und $\sec. 45° = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$.

§. 183. Die Tangenten sind im 1sten und 3ten Quadranten bejahend, im 2ten und 4ten verneinend.

Denn bey den Größen der Bogen wie §. 172. ist $\tan g.\ AGL = AQ = -AP$; $\tan g.\ AGDM = AP$; $\tan g.\ AGDHF = AQ = -AP$.

§. 184.

§. 184. Im 1sten und 3ten Quadranten wachsen die Tangenten von 0 an bis ∞; im zweyten und vierten nehmen sie ab von ∞ an bis wieder zu 0. §. 147.

§. 185. Da BE mit AP parallel: so ist

1) CE : EB = CA : AP, d. i. $\cos.\alpha : \sin.\alpha = r : \text{tang.}\,\alpha$, folglich $\text{tang.}\,\alpha = \frac{r.\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$. Nun ist $\cos.90^\circ = 0$, folglich $\text{tang.}\,90^\circ = \frac{r.\sin.\alpha}{0} = \infty$.

2) CE : CA = CB : CP, d. i. $\cos.\alpha : r = r : \sec.\alpha$, folglich $\sec.\alpha = \frac{r^2}{\cos.\alpha}$. Daher hat auch der Secans mit dem Cosinus stets einerley Zeichen.

§. 186. Erklärung. Eines Bogens AB Cotangente, oder Cosecante, ist die Tangente GR, oder Secante CR seiner Ergänzung GB zum Quadranten.

§. 187. Da CG und AP parallel, folglich APC = GCR: so ist

1) AP : AC = CG : GR, d. i. $\text{tang.}\,\alpha : r = r : \cot.\alpha$, folglich $\cot.\alpha = \frac{r^2}{\text{tang.}\,\alpha}$. Daher haben auch die Cotangenten stets einerley Zeichen mit den Tangenten; auch ist für einen andern Winkel β, $\cot.\beta = \frac{r^2}{\text{tang.}\,\beta}$ folglich $\cot.\beta : \cot.\alpha = \text{tang.}\,\alpha : \text{tang.}\,\beta$.

2) BE : CB = CG : CR, d. i. $\sin.\alpha : r = r : \text{cosec.}\,\alpha$, folglich $\text{cosec.}\,\alpha = \frac{r^2}{\sin.\alpha}$. Daher hat die Cosecante mit dem Sinus stets einerley Zeichen.

§. 188. Lehrsatz. Die trigonometrischen Linien (§. 170. 175. 181. 186) verhalten sich bey ähnlichen Bogen wie die Halbmesser.

Beweis. Aus der Spitze des Winkels ACB (Fig. 2) beschreibe man mit CA, Ca, die ähnlichen Bogen AB, ab, und ziehe ihre trigonometrischen Linien: so ist Cb : CB = bd : BD = Cd : CD, und Cb : CB = Ca : CA = ae : AE = Ce : CE u. s. w. folglich auch Ca : ae = CA : AE. u. s. w.

§. 189. Theilt man beyde Halbmesser in eine gleiche Anzahl aliquoter Theile: so kömmt auf jedes Paar gleichnahmiger trigonometrischer Linien, auch eine gleiche Anzahl solcher Theile, die der Größe des Bogens ab oder AB, folglich der Größe des Winkels ACE (in Verbindung mit obigen Gesetzen dieser Linien) entspricht. Demnach läßt sich die Größe eines Winkels ACE durch die Verhältniß der Linien, CE : EA, oder CA : AE, angeben, die man erhält, wenn man von dem einen Schenkel einen Perpendikel EA auf den andern fällt, wo E beliebig angenommen werden kann. (vergl. §. 169.)

§. 190. Bedeutet also nunmehr α einen Winkel in Graden ausgedrückt: so sind obige Ausdrücke sin. α, cos. α, tang. α u. s. w. Zahlen, die dem Winkel α zugehören, und durch die Verhältniß eines beliebig angenommenen und beliebig getheilten Halbmessers zu den trigonometrischen Linien, bestimmt werden. Z. E. für den Halbmesser CE, ist AE, oder eigentlich CE : AE d. i. $\frac{AE}{CE}$ = sin. x; aber für den Halbmesser CA ist AE, oder eigentlich CA : AE d. i. $\frac{AE}{CA}$ = tang. x. Eben so sind die an-

andern Ausdrücke zu verstehen. Nur muß man hier auch Winkel, die = und > 2 R (wie Plan §. 104) annehmen. Da man sie durch Grade (Plan. §. 261) ausdrückt: so lassen sich die Gesetze, die in Obigem für Bogen gegeben sind, sehr leicht auf Winkel anwenden. In allen Fällen aber, es mag von Bogen oder Winkeln die Rede seyn, muß man bey den Ausdrücken sin. α, cos. α, tang. α u. s. w. allemahl den Halbmesser = 1 im Sinne haben.

§. 191. **Foderung.** Dem Halbmesser ist eine Menge aliquoter Theile gegeben, man soll finden können, wie viel solcher Theile für jeden Bogen oder Winkel, auf jede der trigonometrischen Linien kommen, und welches ihre Logarithmen sind, d. i. man soll die **natürlichen** und **künstlichen** trigonometrischen Linien berechnen können.

Anmerkung. 1. Diese Aufgabe, deren Auflösung sehr weitläuftig ist, und mancherley Kunstgriffe voraussetzt, erscheint deshalb hier als Foderung. Da solche durch die trigonometrischen Tafeln bereits aufgelößt worden: so ist es auch hinreichend, die Möglichkeit davon einzusehen. Nämlich: aus dem gegebenen Halbmesser lassen sich die Sehnen der Bogen berechnen. §. 156. Ihre Hälften geben die Sinus der Bogen §. 171. Durch den Sinus werden die Cosinus und Quersinus bestimmt. §. 176. durch den Cosinus die Secanten, und durch den Sinus und Cosinus die Tangenten. §. 184. Desgleichen durch den Sinus die Cosecanten, und durch die Tangenten die Cotangenten. §. 187. Endlich ergeben sich auch für die gefundnen Zahlen die Logarithmen aus den gemeinen Tafeln.

Anmerkung. 2. Von der Einrichtung und dem Gebrauche der trigonometrischen Tafeln hat man sich folgendes zu bemerken:

1) Die Bequemlichkeit erfordert, daß die Bogen unter 45 Grad, und ihre Ergänzungen zu 90 Grad beysammen stehen; um bey den Sinus ꝛc. zugleich den Cosinus ꝛc. zu haben. Auch braucht man blos einen Quadranten, worauf sich die Bogen über 90 Grad leicht bringen lassen.

2) Die großen Tafeln gehen bis zu 10 oder gar bis zu einzelnen Secunden; die kleinen Tafeln haben nur die Grade und Minuten. Um aber auch einzelne Secunden zu finden, (wenn also die gegebene Linie oder der gegebene Logarithmus nicht in den Tafeln stehet) nimmt man wie § 87. an, daß sich kleine Differenzen der Winkel, wie die Differenzen der zugehörigen Linien, oder ihrer Logarithmen verhalten; welches die größern Tafeln richtiger und leichter geben.

3) Bey Berechnung der Tafeln hat man den Halbmesser = 10000000000 gesetzt, daher sein Logarithmus 10000000 gegeben, aber doch die vorigen Logarithmen 10 ist. In den gemeinen Tafeln hat man die 3 letzten Ziffern weggelassen, also die Linien nur für den Halbmesser = beybehalten; welches bey der Rechnung mit bloßen Logarithmen keinen Fehler bringt, weil man sie als Logarithmen der Linien für gewisse Winkel betrachtet, ohne auf die wirkliche Größe der Linien, sondern nur auf deren Verhältnisse zu sehen.

4) Die trigonometrischen Linien werden zwar unter gewissen Umständen verneinend; aber man sieht sie doch als bejahend an, in so fern von ihren Logarithmen die Rede ist. Denn diese Linien behalten auch noch verneinend einerley Logarithmen, weil sich die Logarithmen nur auf ihre Größe beziehen, und das Verneinende blos die entgegengesetzte Lage bedeutet, die in der Größe nichts ändert.

5) Ist (Fig. 2.) Cb = 1, CB = r, ACB = α, und bedeutet sin. α die Linie für den Halbmesser 1, und

sin.

sin. tab. α die Linie für den Halbmesser r der Tafeln: so ist 1 : r = sin. α : sin. tab. α §. 188; folglich r. sin. α = sin. tab. α, und sin. $\alpha = \frac{\text{sin. tab. } \alpha}{r}$ welches auch für die übrigen trigonometrischen Linien gilt. Z. E. in den gemeinen Tafeln ist r = 10000000, log. r = 10 und sin. 1' = 2909, folglich für den Halbmesser 1, sin. 1' = 0,0002909, und so auch umgekehrt. Ziehet man von dem Logarithmus der Tafeln 10 ab: so erhält man für den Halbmesser 1, log. sin. 1' = 6, 4637261 — 10 = 0,4637261 — 4, und so auch umgekehrt.

Anmerkung 3. Zuweilen ist es zur Bequemlichkeit der Rechnung verstattet, die Winkel selbst anstatt ihrer Sinus oder Tangenten zu setzen. Daß dieses bey kleinen Winkeln, und nur bey diesen statt finde, läßt sich mittelst der Tafeln, welche die Größe des dabey begangenen Fehlers zeigen, leicht beurtheilen.

Anmerkung 4. Bey Auflösung der trigonometrischen Aufgaben kann man die Rechnung auf doppelte Art führen: entweder mit den natürlichen Linien, oder mit den künstlichen, d. i. mit ihren Logarithmen; welches letztre in den meisten Fällen vorzuziehen ist. Einen vortheilhaften Gebrauch der natürlichen Linien zur Ausmessung oder Auftragung der Winkel, sollen die nächstfolgenden Aufgaben lehren.

§. 192. Aufgabe. Einen gegebenen Winkel mit Hülfe der Tafeln genauer, als mit dem Transporteur zu messen.

Auflösung. 1) Es sey der Winkel ACE (Fig. 2.) gegeben. Man mache nach einem verjüngten Maasstabe, CE = 1000, fälle den Perpendikel EA, messe nach eben dem Maaßstabe bey einem kleinen Winkel EA = sin. ACE, bey einem großen

ßen aber AC = cos. ACE, und suche die gefundne Zahl in den Sinustafeln, wo man auf die 4 letzten Ziffern nicht achtet: so stehet dabey die Größe des Winkels ACE. Oder

2) Es sey der Winkel FCM (Fig. 1.) gegeben. Man mache nach dem Maaßstabe CF = CM = 1000, ziehe FM, messe solche nach dem Maaßstabe, und suche die Hälfte der gefundnen Zahl in den Sinustafeln, wie zuvor: so geben solche die Hälfte des gesuchten Winkels. Denn der Perpendikel CS halbirt FM, und FCM, daß $\frac{1}{2}$ FM = sin. $\frac{1}{2}$ FCM ist.

§. 193. **Aufgabe.** Einen in Graden gegebenen Winkel x mit Hülfe der Tafeln genauer als mit dem Transporteur aufzutragen.

Auflösung. 1) Es sey (Fig. 2.) AE auf AC senkrecht gezogen. Man mache aus den Tafeln mit Weglassung der 4 letzten Ziffern, nach einem verjüngten Maasstabe CA = cos. x, AE = sin. x und ziehe CE. Oder bequemer und schärfer: man mache nach dem Maasstabe CA = 1000, und aus den Tafeln AE = tang. x, und ziehe CE: so ist ACE = x. Wäre hiebey x > 45°, folglich tang. x > 1000: so mache man nach dem Maasstabe CF = 1000, und aus den Tafeln FG = cot. x, und ziehe CG. Wäre x stumpf, so mache man nach Obigem seinen Nebenwinkel. Oder

2) Man mache (Fig. 1.) nach dem verjüngten Maasstabe CF = 1000, beschreibe aus C mit CF einen Kreisbogen, trage in denselben aus den Tafeln den sin. $\frac{1}{2}$ x, nach dem man ihn verdoppelt und hierauf die 4 letzten Ziffern weggeworfen hat, nach vorigem Maasstabe FM, und ziehe CM: so ist FCM = x.

§. 194.

§. 194. **Lehrsatz.** Die Seiten eines jeden Triangels HBE (Fig. 3.) verhalten sich wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Beweis. Da sich um jeden Triangel HBE ein Kreis beschreiben läßt: so sind dessen Seiten Sehnen der Bogen, worauf die gegenüberliegenden Winkel stehen, folglich ihre Hälften die Sinus der halben Bogen, also die Sinus der gegenüberliegenden Winkel; alle für den Halbmesser solches Kreises. Demnach ist

$$\sin. H : \sin. B = \frac{1}{2} BE : \frac{1}{2} HE = BE : HE.$$

$$\sin. H : \sin. E = \frac{1}{2} BE : \frac{1}{2} BH = BE : BH.$$

$$\sin. B : \sin. E = \frac{1}{2} HE : \frac{1}{2} BH = HE : BH.$$

§. 195. Anmerkung. Auf diesen Lehrsatz gründet sich die Methode, Triangel aufzulösen, d. i. wenn drey Dinge an einem Triangel gegeben sind, die übrigen zu berechnen; welches eine weit größere Genauigkeit, als die geometrische Verzeichnung, giebt, auch auf die übrigen geradlinichten Figuren, die sich alle in Triangel zerlegen lassen, angewendet werden kann. Soll man aber aus 3 Dingen eines Triangels die übrigen finden: so wird erfodert, daß wenigstens eine Seite unter dem Gegebenen sey; weil aus 3 Winkeln sich kein Triangel bestimmen läßt. Daher kommen hier 4 Aufgaben vor. Es sind nämlich gegeben: 1 Seite und 2 Winkel; 2 Seiten und entweder ein gegenüberliegender, oder der eingeschlossene Winkel; 3 Seiten.

§. 196. **Aufgabe.** In einem △ HBE (Fig. 3.) sind zwey Winkel und eine Seite gegeben; man soll die übrigen Seiten finden.

Auflösung. Da der dritte Winkel mit den beyden andern zugleich gegeben ist: so ist es einerley, welche Seite gegeben sey. Es sey also dies BE: so

so ist sin. H : BE = sin. B : EH = sin. E : BH. §. 194.

§. 197. Aufgabe. In einem △ HBE (Fig. 3.) sind zwey Seiten BE, BH, und ein gegenüberliegender Winkel H gegeben; man soll die übrigen Winkel und Seite finden.

Auflösung. BE : sin. H = BH : sin. E §. 194. wodurch auch B gefunden ist; und hierauf sin. H : BE = sin. B : HE, wie §. 196.

§. 198. Zusatz. Sind in △ ABC (Fig. 3.) CA, CB und der spitze Winkel A gegeben, daß die ihm gegenüberliegende Seite CB, kleiner als die anliegende CA ist: so erhält man durch das Gegebene auch noch einen andern △ AEC (Plan. §. 74.). Denn es ist BC : sin. A = AC : sin. B, und CE : sin. A = AC : sin. AEC. Eben solche Zweydeutigkeit entstehet auch, wenn die dem spitzen Winkel A gegenüberliegende Seite größer als die anliegende ist; nur daß CE die verlängerte BA jenseits A schneidet (Plan. §. 74.). Man muß also aus den Umständen der Aufgabe wissen, ob der gesuchte Winkel spitz oder stumpf seyn müsse.

§. 199. Lehrsatz. In jedem Triangel ABC (Fig. 4.) ist die Summe der beyden Schenkel, AB + AC, zu ihrer Differenz, AB — AC, wie die Tangente der halben Summe der Winkel an der Grundlinie, tang. $\frac{C+B}{2}$, zur Tangente ihrer halben Differenz, tang. $\frac{C-B}{2}$.

Beweis. Von den beyden Winkeln an der Grundlinie sey der größere ACB = x, der kleinere

ABC

ABC = y. Man verlängere den größern Schenkel BA über A hinaus, mache der AC die AD, AE gleich, ziehe DC, CE, und mit letzterer die BF parallel, welche der verlängerten DC in F begegne: so ist DAC = x + y = 2 ACE = 2 AEC = 2 DBF, folglich $\frac{x+y}{2}$ = ACE = AEC = DBF, folglich ECB = CBF = $\frac{x+y}{2}$ §. 30. Nun ist DCE = DFB = R (Plan. §. 170.), also, wenn BF der Halbmesser, FC, FD, Tangenten der Winkel CBF, DBF; auch DB : EB = DF : CF. (Plan. §. 210.) Folglich ist AB + AC : AB — AC = tang. $\frac{x+y}{2}$: tang. $\frac{x+y}{2}$.

§. 200. **Aufgabe.** In einem △ ABC (Fig. 4.) sind zwey Seiten CA, AB, und der eingeschlossene Winkel A gegeben; man soll die übrigen Winkel ACB = x, ABC = y und die dritte Seite BC finden.

Auflösung. Aus A hat man x + y = 2R — A, und nach §. 204. AB + AC : AB — AC = tang. $\frac{x+y}{2}$: tang. $\frac{x-y}{2}$, also auch x — y, und hieraus x sowohl als y §. 30. worauf man BC findet, wie §. 196.

§. 201. **Anmerkung.** Eine andere Auflösung von §. 200. ist: Wenn im △ ABC (Fig. 3.) ein Winkel A mit den Schenkeln gegeben worden, so giebt der Perpendikel CD zwey rechtwinklichte Triangel; da dann r : sin. A = AC : CD, und r : cos. A = AC : AD; folglich AB — AD = DB und CD gegeben ist, woraus man B im rechtwinklichten △ CDB finden kann.

§. 202. Aufgabe. In einem Triangel ACB (Fig. 3.) sind alle drey Seiten gegeben; man soll die Winkel finden.

Auflösung. Mit der kleinsten Seite CB beschreibe man um C einen Kreis, der durch B, E, F, G, gehet; da dann AG = AC + BC, und AF = AC — BC. Nun ist AB : AG = AF : AE (Plan. §. 233.) Folglich ist AB : AC + BC = AC — BC : AE, also AB — AE = BE bekannt. Nun halbirt der Perpendikel CD die BE. Daher ist AD, und DB, bekannt, und man findet in den rechtwinklichten Triangeln ADC, CDB, die Winkel.

Trigonometrische Formeln.

§. 203. Für die trigonometrischen Linien selbst hat man bereits nach Obigem, wenn der Halbmesser = 1 (welches bald eine Länge, bald ein Quadrat bedeutet) gesetzt wird:

1. $\sin. \alpha^2 + \cos. \alpha^2 = 1$. (Fig. 1), folglich $\sin. \alpha = \sqrt{(1 - \cos. \alpha^2)}$; und $\cos. \alpha = \sqrt{(1 - \sin. \alpha^2)}$.

2. $\sin. \text{vers}. \alpha = 1 - \cos. \alpha$; und $\cos. \text{vers}. \alpha = 1 - \sin. \alpha$. §. 176.

3. $\text{tang}. \alpha = \frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha}$ §. 185; und $\cot. \alpha = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha}$ §. 187.

4. $\sec. \alpha = \frac{1}{\cos. \alpha}$ §. 185; und $\text{cosec}. \alpha = \frac{1}{\sin. \alpha}$ §. 187.

5. $\sec. \alpha^2 - \text{tang}. \alpha^2 = 1$. (Fig. 1.); und $\text{cosec}. \alpha^2 - \cot. \alpha^2 = 1$. (Fig. 1.)

6. tang.

6. $\text{tang. } \alpha . \cot. \alpha = 1$; weil (Fig. 1.) APC = PCG, folglich AP : AC = CG : CR, d. i. $\text{tang. } \alpha : r = r : \cot. \alpha$.

Da auch (Fig. 1) CP : CA = AP : BE = CB : CE, d. i. $\sec. \alpha : r = \text{tang. } \alpha : \sin. \alpha = r : \cos. \alpha$, so ist

7. $\text{tang. } \alpha = \sec. \alpha . \sin. \alpha$.

8. $\sin. \alpha = \frac{\text{tang. } \alpha}{\sec. \alpha} = \frac{\text{tang. } \alpha}{\sqrt{(1 + \text{tang. } \alpha^2)}}$ (5.)

9. $\cos. \alpha = \frac{1}{\sec. \alpha} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang. } \alpha^2)}}$ (5.)

§. 204. Im rechtwinklichten Triangel CAE (Fig. 2.) sey CE = a, EA = c, AC = e: so ist für den Halbmesser 1, a : c = 1 : sin. C, und c : e = sin. C : sin. E = sin. C : cos. C. Folglich ist

1. $a = c . \frac{1}{\sin. c} = c . \text{cosec. } C$. §. 203, 4.

2. $c = a . \sin. C$, oder $c = e . \frac{\sin. C}{\cos. C} = e . \text{tang. } C$. §. 203, 3.

3. $e = c . \frac{\cos. C}{\sin. C} = c . \cot. C$. §. 203, 3.

§. 205. Im gleichschenklichten Triangel CFM (Fig. 1.), wo CF = CM = a, halbirt der Perpendikel CS = h, die Grundlinie FM = c, und den Winkel FCM = u. Nun ist

CF : FS = r : sin. FCS, d. i. $a : \frac{1}{2} c = r : \sin. \frac{1}{2} u$.
CF : CS = r : cos. FCS, d. i. $a : h = r : \cos. \frac{1}{2} u$.
FS : CS = sin. FCS : cos. FCS, d. i. $\frac{1}{2} c : h = \sin. \frac{1}{2} u : \cos. \frac{1}{2} u$.

Folglich ist, wenn man r = 1 setzt:

1. $\sin. \frac{1}{2} u = \frac{\frac{1}{2} c}{a}$; und $\cos. \frac{1}{2} u = \frac{h}{a}$.

2. $\frac{1}{2} c = a. \sin. \frac{1}{2} u = h. \frac{\sin. \frac{1}{2} u}{\cos. \frac{1}{2} u} = h. \tang. \frac{1}{2} u$; oder $c = a. 2 \sin. \frac{1}{2} u = h. 2 \tang. \frac{1}{2} u$.

3. $a = \frac{1}{2} c. \frac{1}{\sin. \frac{1}{2} u} = \frac{1}{2} c. \cosec. \frac{1}{2} u = c. \frac{1}{2} \cos. \frac{1}{2} u$; oder $= h. \frac{1}{\cos. \frac{1}{2} u} = h. \sec. \frac{1}{2} u$.

4. $h = a. \cos. \frac{1}{2} u$; oder $h = \frac{1}{2} c. \frac{\cos. \frac{1}{2} u}{\sin. \frac{1}{2} u} = \frac{1}{2} c. \frac{1}{\tang. \frac{1}{2} u} = \frac{1}{2} c. \cot. \frac{1}{2} u$.

Anmerkung. Diese Formeln dienen auch, wie der Anblick der Figur lehrt, zur Berechnung regulärer Polygone und des Kreises.

§. 206. In jedem schiefwinklichten Triangel ABC (Fig. 5. 6.) fällt ein Perpendikel CD (von der Spitze auf die Grundlinie) entweder innerhalb, wie (Fig. 5.), wo beyde anliegende Winkel A, B, spitz sind; oder außerhalb, wie (Fig. 6.), wo einer dieser Winkel A stumpf ist. Nennt man nun die Winkel A, B, C, und die opponirten Seiten in der Ordnung a, b, c: so ist nach §. 204.

1. CD = b. sin. A. 2. CD = a. sin. B.
3. AD = b. cos. A. 4. BD = a. cos. B.
5. BD = c — b. cos. A. Denn es ist (Fig. 5.) BD = AB — AD = c — b. cos. A. Nun ist zwar (Fig. 6.) BD = AB + AD = c + b. cos. A, aber hier A stumpf, und daher cos. A verneint. Folglich gilt vorige Formel allgemein, wenn man nur cos. A, für einen stumpfen Winkel, verneint nimmt.

§. 207.

§. 207. I. In den schiefwinklichten Triangeln ABC (Fig. 5. 6.) ist $BC^2 = CD^2 + DB^2$, d. i. nach §. 206, 1. 5. $a^2 = b^2.\ \sin. A^2 + c^2 - 2bc.\ \cos. A + b^2.\ \cos. A^2 = b^2 (\sin. A^2 + \cos. A^2) + c^2 - 2bc.\ \cos. A$, wo $\sin. A^2 + \cos. A^2 = 1$. §. 203, 1. Folglich ist

1. $a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc.\ \cos. A)}$.

II. Aus §. 206 hat man $\frac{CD}{BD} = \frac{b.\ \sin. A}{c - b.\ \cos. A} = \frac{a.\ \sin. B}{a.\ \cos. B} = \frac{\sin. B}{\cos. D} = \text{tang}. B$ §. 203. Folglich ist

2. $\text{tang}. B = \frac{b.\ \sin. A}{c - b.\ \cos. A} = \frac{\sin. A}{\frac{c}{b} - \cos. A}$. Demnach ist auch $\frac{1}{\text{tang}. B} = \frac{c - b.\ \cos. A}{b.\ \sin. A} = \frac{c}{b.\ \sin. A} - \frac{\cos. A}{\sin. A} = \frac{c}{b}.\ \text{cosec}. A - \cot. A$. Folglich ist $\frac{1}{\text{tang}. B}$ oder

3. $\cot. B = \frac{c}{b}.\ \text{cosec}. A - \cot. A$.

III. Aus (1.) hat man

4. $\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Demnach ist auch

$$1 + \cos. A = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a + b + c)\ (b + c = a)}{2bc}$$

$$1 - \cos. A = \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2bc} = \frac{(a + b - c)\ (b + c - a)}{2bc}$$

Nun ist $(1 + \text{cos. } A)\ (1 - \text{cos. } A) = 1 - \text{cos. } A^2 = \text{sin. } A^2$. Folglich ist

5. $\text{sin. } A = \frac{\sqrt{.(a+b+c)\ (a+b-c)\ (a+b-c)\ (b+c-a)}}{2\,b\,c}$.

Bezeichnet man den Zähler dieses Bruchs mit u: so ist, weil $CD = b.\ \text{sin. } A.$ §. 206.

6. $CD = \frac{u}{2c}$. Bezeichnet man den Inhalt des Triangels mit T: so ist $T = \frac{1}{2} c.\ CD$, folglich

7. $T = \frac{1}{2}\,bc.\ \text{sin} A$ §. 206, oder aus (6) $= \frac{1}{2} c. \frac{u}{2c}$, folglich

8. $T = \frac{1}{4} u$.

Anmerkung. Man siehet obigen Formeln ihren Gebrauch leicht an. So dient (1) aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite (2. 3.) einen der beyden übrigen Winkel, und (4. 5.) aus 3 Seiten die Winkel zu finden. Auch lassen sich daraus noch andere Formeln herleiten. Für einen gleichschenklichten Triangel setzt man die Buchstaben für die Schenkel einander gleich.

§. 208. Aus dem Sinus und Cosinus zweyer Winkel A, B, wird der Sinus und Cosinus ihrer Summe $A + B$, und ihrer Differenz $A - B$, durch folgende Formeln bestimmt:

1. $\text{sin. } (A+B) = \text{sin. } A.\ \text{cos. } B + \text{sin. } B.\ \text{cos. } A.$
2. $\text{cos. } (A+B) = \text{cos. } A.\ \text{cos. } B - \text{sin. } A.\ \text{sin. } B.$
3. $\text{sin. } (A-B) = \text{sin. } A.\ \text{cos. } B - \text{sin. } B.\ \text{sin. } A.$
4. $\text{cos. } (A-B) = \text{cos. } A.\ \text{cos. } B + \text{sin. } A.\ \text{sin. } B.$

Beweis. I. Es bedeute π die halbe Peripherie, oder 2 rechte Winkel, und es sey $A + B < \pi$: so

so kann man sich A und B als Winkel eines Triangels (Fig. 5. 6.) vorstellen; da dann $A+B=\pi-C$, folglich $\sin.(A+B)=\sin.(\pi-C)=\sin. C$. Nun ist

1) $b:c=\sin. B:\sin. C$, folglich $\sin. C=\frac{c}{b}\sin. B$. Auch ist nach §. 206. $CD:BD=b$, $\sin. A:c-b$. $\cos. A=a$. $\sin. B:a$. $\cos. B=\sin. B:\cos. B$. Folglich ist $\sin. A.\cos. B+\sin. B.\cos. A=\frac{c}{b}\sin. B=\sin. C=\sin.(A+B)$. Demnach ist auch, wenn man blos die Buchstaben A, C verwechselt,

2) $\sin. A=\sin. C.\cos. B+\sin. B.\cos. C$, und statt sin. C der vorige Werth gesetzt,

$\sin. A=\sin. A.\cos. B^2+\sin. B.\cos. A.\cos. B+\sin. B.\cos. C$,

oder $\sin. A-\sin. A.\cos. B^2$ d. i. $\sin. A(1-\cos. B^2)$ d. i.

$\sin. A.\sin. B^2=\sin. B.\cos. A.\cos. B+\sin. B.\cos. C$,

oder $\sin. A.\sin B=\cos. A.\cos. B+\cos. C$, folglich $\sin. A.\sin. B=\cos. A.\cos. B=\cos. C=\cos.(A+B)$

Verlängert man BA (Fig. 5.) nach E: so ist $C=CAE-B$, und daher sin. und cos. von C, gleich dem sin. und cos. von $CAE-B$, oder von $CAB-B$, d. i. von $A-B$, weil nach §. 172. 177. Nebenwinkel CAE, CAB einerley sin. und cos. haben, nur daß hier cos. A, wegen des stumpfen Winkels A, negativ wird. Daher ist

3) aus (1) $\sin. A.\cos. B-\sin. B.\cos. A=\sin C=\sin(A-B)$.

4) aus (2) $\sin. A. \sin. B + \cos. A. \cos. B = \cos. C = \cos (A - B)$.

II. Aus §. 173. Anm. kann man sich überzeugen, daß die Formeln, welche für $A + B < \pi$ bewiesen worden sind, auch allgemein für jede Bögen A, B, gelten, wenn auch $A + B > n\,\pi$ wäre.

§. 209. Aus den Formeln §. 208. erhält man durch Addition und Subtraction:

1. $\sin. (A + B) + \sin. (A - B) = 2 \sin. A. \cos. B.$
2. $\sin. (A + B) - \sin. (A - B) = 2 \sin. B. \cos. A.$
3. $\cos. (A - B) + \cos. (A + B) = 2 \cos. A. \cos. B.$
4. $\cos. (A - B) - \cos. (A + B) = 2 \sin. A. \sin. B.$

Anmerkung. Diese Formeln, woraus sich noch viele andere herleiten lassen, dienen, Summen und Differenzen der Sinus und Cosinus in Producte zu verwandeln (wie die logarithmischen Rechnungen erfodern) und umgekehrt.

§. 210. Aus den Tangenten zweyer Winkel A, B, wird die Tangente und Cotangente ihrer Summe, $B + A$, und ihrer Differenz $B - A$ durch folgende Formeln bestimmt:

1. $\text{tang.}\ (A + B) = \dfrac{\text{tang. } A + \text{tang. } B}{1 - \text{tang. } A.\ \text{tang. } B}$

2. $\text{tang.}\ (A - B) = \dfrac{\text{tang. } A - \text{tang. } B}{1 + \text{tang. } A.\ \text{tang. } B}$

3. $\text{cot.}\ (A + B) = \dfrac{1 - \text{tang. } A.\ \text{tang. } B}{\text{tang. } A + \text{tang. } B}$

4. $\text{cot.}\ (A - B) = \dfrac{1 + \text{tang. } A.\ \text{tang. } B}{\text{tang. } A - \text{tang. } B}$

Beweis.

Beweis. Da allgemein $\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{sin.}\,\alpha}{\text{cos.}\,\alpha}$ §. 203, 3. so ist $\text{tang.}\,(A + B) = \frac{\text{sin.}\,(A + B)}{\text{cos.}\,(A + B)} = \frac{\text{sin. A. cos. B} + \text{sin. B. cos. A}}{\text{cos. A. cos. B} - \text{sin. A. sin. B}}$ §. 208. und wenn man alle Glieder mit cos. A cos. B dividirt, $= \left\{\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}} + \frac{\text{sin. B}}{\text{cos. B}}\right\} : 1 - \frac{\text{sin. A. sin. B}}{\text{cos. A cos. B}} = \frac{\text{tang. A.} + \text{tang. B.}}{1 - \text{tang. A. tang. B}}$.

Und nun ist $\text{cot.}\,(A + B) = \frac{1}{\text{tang.}\,(A + B)}$. Eben so wird der Beweis von der Differenz geführt.

§. 211. Um die trigonometrischen Linien des doppelten Bogens, 2 A zu finden, setze man in Obigem B = A; da dann

1. $\text{sin. } 2A = 2\,\text{sin. A. cos. A.}$ §. 208, 1.

2. $\text{cos. } 2A = \text{cos. A}^2 - \text{sin. A}?$ §. 208, 2. $= 1 - 2\,\text{sin. A}^2$
$= 2\,\text{sin. A}^2 - 1$ (weil $\text{cos. A}^2 = 1 - \text{sin. A}^2$, und $\text{sin. A}^2 = 1 - \text{cos. A}^2$)

3. $\text{tang. } 2A = \frac{2\,\text{tang. A}}{1 - \text{tang. A}^2}$ §. 210, 1.

4. $\text{cot. } 2A = \frac{1 - \text{tang A}^2}{2\,\text{tang. A.}}$ §. 210, 3.

Anmerkung. Aus diesen Gleichungen findet man auch die trigonometrischen Linien für halbe Bogen; denn wenn man den doppelten Bogen für den ganzen ansiehet: so wird der einfache ein halber.

§. 212. Setzt man $A + B = S$, und $A - B = D$: so ist $A = \frac{1}{2}(S + D)$ und $B = \frac{1}{2}(S - D)$ §. 30. Demnach ist in §. 209.

$$1.\ \frac{\sin. S. + \sin. D}{\sin. S - \sin. D} = \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(S+D).\ \cos. \tfrac{1}{2}(S-D)}{\cos. \tfrac{1}{2}(S+D).\ \sin. \tfrac{1}{2}(S-D)}$$

$$= \text{tang}. \tfrac{1}{2}(S+D).\ \cot \tfrac{1}{2}(S-D) = \frac{\text{tang}. \tfrac{1}{2}(S+D)}{\text{tang}. \tfrac{1}{2}(S-D)}$$

$$2.\ \frac{\cos. S + \cos. D}{\cos. S - \cos. D} = \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(S+D).\ \cos. \tfrac{1}{2}(S-D)}{\sin. \tfrac{1}{2}(S+D).\ \sin. \tfrac{1}{2}(S-D)}$$

$$= \cot. \tfrac{1}{2}(S+D).\ \cot.^{1}(S-D) = \frac{\cot. \tfrac{1}{2}(S+D)}{\text{tang}. \tfrac{1}{2}(S-D)}$$

VII.

Sphärische Trigonometrie.

§. 213.

Erklärung. Ein sphärischer Triangel ABC (Fig. 7.) ist, den drey Bogen größter Kreise auf einer Kugelfläche machen. Diese Bogen geben die Seiten und Winkel des Triangels. (Ster. §. 111.)

Anmerkung. Anfängern kömmt man in der Vorstellung sphärischer Triangel sehr zu Hülfe: 1) wenn man ihnen Scheiben aus Pappe zusammensetzt. 2) wenn man Ringe von Drath zu einer Kugel verbindet. 3) wenn man eine hölzerne Kugel mit einem Kreitenfirniß überziehet, und um dieselbige in beliebiger Lage einen Drath beuget, der zur Ziehung der Kreislinien mit einer Bleyfeder eben so dient, wie ein Lineal zur Ziehung gerader Linien. Die so auf der Kugel vorgezeichneten Figuren können mit Bimsstein ausgewischt werden, um wieder andere zu zeichnen.

§. 214.

§. 214. Gerade Linien von den Spitzen des Triangels nach der Kugel Mittelpunkte K, geben drey ebene Winkel, deren Maaße die Seiten des Triangels sind, und die an K eine Ecke machen. Diese ist die Spitze eines pyramidenförmigen Körpers, dessen gebogene Grundfläche die Fläche des sphärischen Triangels ist. Daher sind jede zwey Seiten zusammen > 3te, und alle drey < 4 R. (Ster. §. 37.)

§. 215. Anmerkung. Bogen schlechthin, die nach Graden angegeben werden, sollen die Seiten des Triangels anzeigen; aber Ebene eines Bogens soll die Ebene des größten Kreises bedeuten, von welchem der Bogen ein Stück, und der Winkel, den der Bogen mißt, ein Ausschnitt ist.

§. 216. Der sphärische Winkel, den zwey Bogen machen, ist der Neigungswinkel der Ebenen dieser Bogen. Nämlich wenn von einer Seite BC Endpunkte C, ein Perpendikel CM auf die Ebene der andern Seite BA, und ein zweyter Perpendikel CN, auf beyder Ebenen Durchschnitt BK fällt, und man ziehet NM: so ist CNM die Neigung der beyden Ebenen, oder der sphärische Winkel B. Eben so ist CQM der sphärische Winkel A. (Ster. §. 23. 4).

§. 217. Erklärung. Ein rechtwinklichter sphärischer Triangel BAC (Fig. 8.) ist, wenn die Ebenen zweyer Bogen CA, AB, (folglich auch die Bogen §. 216) senkrecht auf einander sind; da dann die Ebene des Bogens CA, durch CM, den Perpendikel von C auf die Ebene des Bogens AB, liegt, und CA der Perpendikel, AB die Grundlinie, und BC die Hypotenuse des Triangels ist.

§. 218. Ein sphärischer Triangel FAD (Fig. 10) kann auch zwey rechte Winkel bey A und D haben, wenn der Ebenen FA, FD, Durchschnitt FC, auf der Ebene AD senkrecht ist; da dann FA, FD, Quadranten sind, und F der Pol der Ebene AD ist. Alsdann ist AD das Maaß von F, und kann bis 90 Grad und drüber seyn; da dann im ersten Falle 3 rechte Winkel, im zweyten, 2 rechte und 1 stumpfer entstehen.

Anmerkung. Bey den geradlinichten Triangeln machen alle drey Winkel nur 2 rechte. Daher ist die sphärische Trigonometrie viel weitläuftiger, als die ebene.

§. 219. Man kann den sphärischen Triangel (Fig. 10) immer so nehmen, daß jede Seite kleiner als 180 Grad ist. Von solchen ist blos die Rede.

Denn da zwey größte Kreise einander halbiren: so läßt sich der dritte auf der Seite nehmen, wo jene zwey einen spitzen Winkel machen.

§. 220. Lehrsatz. In jedem rechtwinklichten sphärischen Triangel BAC (Fig. 8.) ist

I. r: sin. BC = sin. B: sin. AC.

II. r : sin. AB = tang. B: tang. AC.

III. r: cos. AC = cos. AB: cos. BC.

IV. r: cos. B = cot. AB: cot. BC.

V. r: cos. AC = sin. C: cos. B.

VI. r: cos. BC = tang. C: cot. B.

Beweis 1) Im rechtwinklichten △ CMN ist r: CN = sin. CNM : CM = sin. MCN : NM, d. i. r: sin. BC = sin. B: sin. AC = sin. C: sin. AB.

2) in

2) in dem rechtw. △ KMC, CMN, KNM, ist

KM:MC = r : tang. CKM	auch
MC : NM = tang. MNC : r	KM : NM = r : sin. MKN

KM : NM oder r : sin. MKN = tang. MNC : tang. CKM, d. i. r : sin. AB = tang. B : tang. AC.

Auf eben die Art (wenn nun von B ein Perpendikel auf die Ebene CA fällt, wie vorher von C auf die Ebene AB §. 117.) wird bewiesen:
r : sin. AC = tang. C : tang. AB.

3) Verlängert man (Fig. 9) in dem rechtwinklichten sphärischen △ BAC, die Seiten BA, BC, bis BM, BN Quadranten werden: so sind bey M, N, rechte Winkel, und AC, MN, schneiden einander in des Kreises BM Pole D; auch ist B der Pol von MD. Folglich sind CN, DC, die Ergänzungen von BC, CA; und D, DN, von BA, B.

Wendet man nun die erwiesenen Proportionen auf den rechtwinklichten sphärischen △ CND an; und bringt alles auf den △BAC: so hat man

r : sin. CD = sin. D : sin. NC (I) d. i. r : cos. AC = cos. AB : cos. BC.

r : sin. DN = tang. D : tang. CN. (II) d. i. r : cos. B = cot. AB : cot. BC.

r : sin. CD = sin. C : sin. ND (I) d. i. r : cos. AC = sin. C : cos. B.

r : sin. CN = tang. C : tang. ND (II) d. i. r : cos. BC = tang. C : cot. B.

§. 221. Diese 6 Proportionen, oder Gesetze, §. 220. enthalten alle Fälle für rechtwinklichte sphärische Triangel. Denn da hier der rechte Winkel

kel allemahl gegeben ist: so werden nächst ihm nur zwey Dinge gegeben, und ein drittes daraus gesucht. Daher 3 Glieder der Frage, und zwar

1) 3 Seiten, nach III.

2) 2 Seiten und 1 Winkel, nämlich

 a) 2 Perpendikel und 1 Winkel, nach II.

 b) Hypotenuse, Perpendikel und

  α) der gegenüberliegende Winkel, nach I.

  β) der anliegende Winkel, nach IV.

3) 1 Seite und 2 Winkel; nämlich

 a) Perpendikel und 2 Winkel nach V.

 b) Hypotenuse und 2 Winkel nach VI.

§. 222. Jede dieser 6 Proportionen beantwortet 3, folglich alle zusammen 18 Fragen, wovon aber 2 abgehen; weil in III. und IV, bey der Hypotenuse nebst 2 Perpendikeln oder 2 Winkeln, es gleichgültig ist, welcher von beyden gesucht werde, daher jede dieser beyden Proportionen nur 2 Fragen giebt.

Bey jeder dieser 16 Fragen ist die Proportion so zu ordnen, daß das Gesuchte das letzte Glied wird; wobey man aber, so viel als möglich den Halbmesser zum ersten Gliede zu behalten suchen muß. Und dies bewerkstelligt man leicht durch Hülfe der beyden Proportionen aus der ebenen Trigonometrie, $\text{tang. } y : \text{tang. } x = \cot x : \cot. y$, und $\text{tang. } x : r = r : \cot. x$. §. 187.

Z. E. sucht man in II. das 3te Glied: so setze man, $r : \sin. AB = \cot. AC : \cot. B$. Oder sucht man in II. das 2te Glied, so setze man $\text{tang. } B : r$, d. i. $r : \cot. B = \text{tang. } AC : \sin. AB$. Eben so, wenn man in IV. das dritte Glied sucht, so setze man

man r: cos. B = tang. BC : tang. AB, oder das 2te, cot. AB: r d. i. r: tang. AB = cot. BC : cos. B. Auf eben die Art verwandelt man auch VI. in tang. C: r d. i. r: cot. C = cot. B: cos. BC.

§. 223. Sind nicht alle Seiten des rechtwinklichten Triangels kleiner als Quadranten: so sind der größern Seiten Cosinus, Tangenten und Cotangenten verneint; die Sinus aber allemal bejaht; welches mit Hülfe der Zeichen die sonst entstehende Zweydeutigkeit hebt. Z. E. in III. ist

$$+ r : \pm \cos. AC = \pm \cos. AB : + \cos. BC$$
$$= \mp \cos. AB : - \cos. BC.$$

Anmerkung. Von den Logarithmen bey verneinten Bogen vergleiche man §. 191.

§. 224. Hiebey nennt man ein Paar Winkel oder Bogen gleichartig, wenn beyde spitz, oder beyde stumpf sind; ungleichartig aber, wenn der eine stumpf, der andere spitz ist. Auf ähnliche Art heißt auch Kürze wegen ein Bogen unter 90 Grad spitz, über 90 Grad stumpf, und ist mit seinem gegenüberliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig.

§. 225. Aus den Zeichen §. 223. ergeben sich folgende Regeln:

1. Jeder Perpendikel ist mit seinem gegenüberliegenden Winkel gleichartig; weil (nach II) der Sinus allemahl bejahend ist. Folglich
   a) Sind beyde Winkel spitz, oder stumpf: so sind es auch beyde Perpendikel; und
   b) Ist ein Winkel spitz, der andere stumpf: so verhält es sich eben so mit den Perpendikeln.

2. Die

2. Die Hypotenuse ist spitz, oder stumpf; je nachdem die beyden Perpendikel gleichartig oder ungleichartig sind, vermöge III.

3. Die Hypotenuse ist spitz oder stumpf; je nachdem ein Winkel mit dem anliegenden Perpendikel gleichartig oder ungleichartig ist, vermöge IV.

4. Ein Winkel ist spitz, oder stumpf; je nachdem der andere mit der Hypotenuse gleichartig oder ungleichartig ist, vermöge VI.

§. 226. Giebt die Proportion den Sinus des gesuchten Bogens oder Winkels, wie

I. r : sin. BC = sin. B : sin. AC,

sin. BC : r = sin. AC : sin. B,

sin. B : sin. AC = r : sin. BC,

II. r : cot. B = tang. AC : sin. AB,

V. cos. AC : r = cos. B : sin. C;

so findet man zwar nach Obigem das zugehörige Zeichen; kann aber dadurch noch nicht entscheiden, ob das Gesuchte $<$ oder $>$ 90° sey, wofern nicht §. 225, 1. den Ausschlag giebt. Dies findet in den 2 ersten der oben angeführten Fragen statt; die 3 letzten aber bleiben zweydeutig, wie §. 198.

Denn es sey im rechtwinklichten △ DAC (Fig. 11.) der Bögen AD, DC, zweyter Durchschnitt E, und hier EB, EF, obgenannten Bögen gleich gemacht: so ist auch FB, CA. Folglich kann bey völlig gleichen gegebenen Dingen das Gesuchte in diesen 3 Fragen auch DF, DB, DFB seyn.

§. 227. Wäre in einem schiefwinklichten sphärischen Triangel DBC (Fig. 11. 12.) die eine Seite BC ein Quadrant; so läßt sich allemahl ein recht winkz-

winklichter Triangel bestimmen, woraus man jenen berechnen kann.

Denn macht man BA = 90 Grad, daß folglich CA das Maaß des Winkels B ist: so ist Fig. 12. AD = 90° — DB, DCA = 90° — BCD, Fig. 11. AD = DB — 90°, DCA = BCD — 90°. Daher sind die nunmehr folgenden Regeln für schiefwinklichte sphärische Triangel, zwar ganz allgemein, aber nur alsdann nothwendig, wenn keine Seite ein Quadrant ist.

§. 228. **Lehrsatz.** In jedem schiefwinklichten sphärischen Triangel fällt der senkrechte Bogen von der Spitze auf die Basis innerhalb, wenn die Winkel an der Basis gleichartig sind, und ist mit ihnen gleichartig; außerhalb aber, wenn solche Winkel ungleichartig sind, und ist mit dem nächsten Winkel ungleichartig.

Beweis. Nähme man das Gegentheil an: so müßte dieser senkrechte Bogen zugleich spitz und stumpf seyn §. 225. 1 welches unmöglich ist.

Z. E. In dem △DBC (Fig. 11.) wo D und B spitz sind, fällt der Perpendikel CA innerhalb, und ist auch spitz. In dem △ DBC (Fig. 12) wo B spitz, D stumpf ist, fällt der Perpendikel CA außerhalb, und ist wegen B spitz, folglich mit dem nächsten Winkel CDB ungleichartig. In dem Triangel (Fig. 10) dessen Basis EBH, und Schenkel DE, DH sind, wo an der Basis zwey stumpfe Winkel, fällt der Perpendikel DB gleichfalls innerhalb, und ist wie die Winkel stumpf. Anstatt eines solchen Triangels aber läßt sich auch die Ergänzung zur halben Kugel, oder der △ EDH betrachten, wo DA auf EH senkrecht ist.

§. 229.

§. 229. Durch den Perpendikel CA Fig. 11. 12. wird der schiefwinklichte Triangel in zwey rechtwinklichte CAB, CAD, zerfällt, so daß, wenn unter den gegebenen Dingen ein Winkel B, und eine Seite BC vorkömmt, der Perpendikel diese nicht durchschneide, und man daraus BA oder BCA finde, wodurch sich, wenn DB oder C gegeben ist, AD oder ACD ergiebt, und man also im △ CAD das übrige berechnen muß. Ist DC oder D gegeben, so muß man eben so AD oder ACD finden. Sind alle 3 Seiten oder Winkel gegeben, so muß man AD, BA, oder ACD, BCA suchen. Zu dergleichen Berechnungen giebt der folgende Lehrsatz Anweisung.

Anmerkung. Die hiebey vorkommenden Zweydeutigkeiten müssen aus den jedesmaligen Umständen der Frage mit Zuziehung §. 228. und mit Hülfe der Zeichen entschieden werden. Eine allgemeine Entwickelung dieser Sache mögte die ersten Anfänger abschrecken. Oft kann man sich durch einen ohngefehren Entwurf schon helfen. Noch ist zu bemerken, daß Abschnitte der Grundlinie, oder des Scheitels die Stücke heißen, welche der Perpendikel begränzt, wie AD, BA; ACD, BCA, Fig. 11. 12; und daß man z. E. Fig. 11. die Abschnitte BA, BCA dem Schenkel BC, und dem Winkel B anliegend, aber dem Schenkel DC und dem Winkel D entgegengesetzt nenne. Die Winkel an der Grundlinie B, D sollen schlechthin Winkel heißen.

§. 230. Lehrsatz. In jedem schiefwinklichten Triangel DBC (Fig. 11. 12.) wo CA senkrecht, ist:

1. sin. CD : sin. CB = sin. CBD : sin. CDB.
d. i. die Sinus der Schenkel, wie die Sinus der entgegengesetzten Winkel.

2. cos.

2. cos. CD : cos. CB = cos. AD : cos. AB.
d. i. die Cosinus der Schenkel, wie die Cosinus der anliegenden Abschnitte der Grundlinie.

3. tang. CD : tang. CB = cos. BCA : cos. DCA.
d. i. die Tangenten der Schenkel, wie die Cosinus der entgegengesetzten Abschnitte des Scheitels.

4. cos. CBA : cos. CDA = sin. BCA : sin. DCA.
d. i. die Cosinus der Winkel, wie die Sinus der anliegenden Abschnitte des Scheitels.

5. tang. CBA : tang. CDA = sin. DA : sin. BA.
d. i. die Tangenten der Winkel, wie die Sinus der entgegengesetzten Abschnitte der Grundlinie.

6. cot. $\frac{1}{2}$ (BC + CD) : tang. $\frac{1}{2}$ (BC — CD) = cot. $\frac{1}{2}$ (BA + AD) : tang. $\frac{1}{2}$ (BA — AD).
d. i. die Cotangente der halben Summe der Schenkel, zur Cotangente ihrer halben Differenz; wie die Cotangente der halben Summe der Abschnitte der Grundlinie, zur Tangente ihrer halben Differenz.

7. cot. $\frac{1}{2}$ (D + B) : tang. $\frac{1}{2}$ (D — B) = cot. $\frac{1}{2}$ (BCA + DCA) : cot. $\frac{1}{2}$ (BCA — DCA)
d. i. die Cotangente der halben Summe der Winkel, zur Tangente ihrer halben Differenz; wie die Cotangente der halben Summe der Abschnitte des Scheitels, zur Tangente ihrer halben Differenz.

Beweis. 1.) Da der Perpendikel CA jeden dieser schiefen Triangel Fig. 11. 12. in zwey rechtwinklichte theilet §. 229, denen solcher Perpendikel gemein ist: so suche man aus §. 220. Proportionen, worinn r und CA vorkömmt, um durch deren Verbindung diese Triangel zu vergleichen. Nur muß man hiebey die Cosinus und Tangenten von den in-

 nern

nern Winkeln der rechtwinklichten Triangel verstehen, wenn man aus ihren Zeichen schließen will; die Sinus aber bleiben hier beständig bejaht. Demnach ist nach §. 220.

1) r. sin. AC = sin. CB. sin. B = sin. CD. sin. D. (I.) folglich sin. CD : sin. CB = sin. B : sin. D.

2) cos. AC : r = cos. CD : cos. AD = cos. CB : cos. AB (III) oder cos. CD : cos. CB = cos. AD : cos. AB.

3) r. tang. AC = cos. BCA. tang CB. = cos. DCA. tang. DC. (V) folglich tang. CD : tang. CB = cos. BCA : cos. DCA.

4) cos. AC : r = cos. CBA : sin. BCA = cos. CDA : sin. DCA : (IV.) folglich cos. CBA : cos. CDA = sin. BCA : sin. DCA.

5) r. tang. AC = tang CBA. sin. BA = tang. CDA. sin. DA (II) folglich tang. CBA : tang CDA = sin. DA : sin. BA.

II) Aus den hier bewiesenen Gesetzen mit Zuziehung §. 212. lassen sich die übrigen herleiten. Denn

6) Da cos. CD : cos. CB = cos. AD : cos. AB (2) so ist auch (cos. CD + cos. CB) : (cos. CD — cos. CB) = (cos. AD + cos. AB) : (cos. AD — cos. AB) Arithm. §. 169; da dann der Satz aus §. 212. erhellet.

7) Da cos. B : cos. D = sin. BCA : sin. DCA (4) so ist auch (cos. B + cos. D) : (cos. B — cos. D.) = (sin. BCA + sin. DCA) : (sin. BCA — sin. DCA) Arithm. §. 169; da dann der Satz aus §. 212. erhellet.

§. 231. **Aufgabe.** Im schiefwinklichten sphärischen Triangel DBC (Fig. 11, 12.) sind drey

Din-

Dinge gegeben; man soll die übrigen durch Rechnung finden.

Auflösung. Man verfahre nach §. 229. durch Hülfe der Proportionen in §. 220 und 230.; nämlich

1) aus CD, CB, B, wird D gesucht; da dann sin. CD : sin. CB = sin.B : sin. D. (1.)

2) aus CB, B, D, wird CD gesucht; da dann sin. D : sin. B = sin. CB : sin. CD. (1.)

3) aus CB, CD, B, wird BD gesucht; da dann r : cos. B = tang. BC : tang. AB (IV.) und cos. BC : cos. DC = cos. BA : cos. DA (2)

4) aus CB, CD, B, wird C gesucht; da dann r : cos. BC = tang. B : cot. BCA (VI.) und tang. CD : tang CB = cos. BCA : cos. DCA. (3)

5) aus BC, B, D, wird C gesucht; da dann r : cos. BC = tang. B : cot BCA (VI) und cos. CBA : cos. CDA = sin. BCA : sin. DCA. (4.)

6) aus BC, B, D, wird BD gesucht; da dann r : cos. B = tang. BC : tang. BA. (IV.) und tang. CDA : tang. CBA = sin. BA : sin. DA. (5.)

7) aus BC, B, C, wird D gesucht; da dann r : cos. BC = tang. B : cot. BCA (VI) und sin. BCA : sin. DCA = cos. CBA : cos. CDA. (4.)

8) aus BC, B, C, wird CD gesucht; da dann r : cos. BC = tang. B : cot. BCA. (VI) und cos. DCA : cos. BCA = tang. CB : tang CD. (3.)

9) aus BC, BD, B, wird CD gesucht; da dann r : cos. B = tang. BC : tang. BA. (IV) und cos. AB : cos. AD = cos. CB : cos. CD. (2.)

10) aus BC, BD, B, wird D gesucht; da dann
r : cos. B = tang. BC : tang. BA (IV) und
sin. DA : sin. BA = tang. CBA : tang. CDA. (5.)

11) aus BC, BD, CD, wird B gesucht; da man dann aus BC, CD, $\frac{1}{2}$ BD, nach (6) BA — AD, folglich AB, und hierauf aus (IV) B findet.

12) aus B, C, D, wird BC gesucht; da man dann aus B, D, $\frac{1}{2}$ BCD nach (7) BCA — DCA, folglich BCA, und hierauf aus (VI) BC findet.

§. 232. Anmerkung. Daß aber obige Fälle für alle mögliche Fragen von schiefwinklichten sphärischen Triangeln hinreichen, erhellet aus folgender Uebersicht:

Gegeben	Gesucht	Fall
A. 3 Seiten	1 Winkel.	11
B. 3 Winkel	1 Seite.	12
C. 2 Seiten, 1 Winkel		
a.) Der eingeschlossene W.	3te Seite	9
	1 Winkel	10
b. Der opponirte W. = =	oppon. Winkel	1
	eingeschl. Winkel	4
	3te Seite	3
D. 2 Winkel, 1. Seite		
a.) Die eingeschlossene S.	1 Winkel	7
	1 Seite	8
b.) Die opponirte S. =	oppon. Seite	2
	anlieg. Seite	6
	3ten Winkel.	5

VIII.

VIII.

Höhere Geometrie.

§. 233.

Von allen Punkten der Peripherie eines Kreises um C (Fig. 13) lassen sich Linien, wie DEd, FGf u. s. w. senkrecht auf den Durchmesser AB ziehen. Setzt man AB = a; jedes von A an abgeschnittene Stück des Durchmessers, wie AE, = x, daher das übrige EB = a — x, und jeden Perpendikel, wie ED, = y, da dann jedem x ein gewisses y zugehört: so ist, weil immer ∺ AE. ED. EB, allgemein $y^2 = ax - x^2$, folglich $y = \mp\sqrt{(ax - x^2)}$.

§. 234. Eine veränderliche Größe (wie x und y §. 233.) ist, welcher man vielerley Werthe nach einander geben kann; zum Unterschiede von einer beständigen, wie a, die immer ihren einmahligen Werth unverändert beybehält, was auch für Werthe auf x und y kommen. Die algebraische Verbindung aber der beständigen a mit der einen veränderlichen x, wie §. 233, bestimmt einen oder etliche Werthe der andern veränderlichen y. §. 115.

§. 235. Eine veränderliche Größe, wie y, die durch eine andere veränderliche, wie x, und durch beständige Größen, wie a, bestimmt wird, heißt eine Function dieser andern x.

§. 236. Eine Gleichung für eine Linie, heißt eine Gleichung zwischen veränderlichen Größen, wie x, y, und beständigen, wie a; und wird durch eine Function der einen veränderlichen Größe gegeben. So ist z. E. §. 233. eine Gleichung für die Kreislinie, und wird durch die Function von x gegeben.

Anmerkung. Auch für die gerade Linie läßt sich eine Gleichung finden.

§. 237. Eine Linie, wie AB Fig. B, auf welcher die Werthe von x genommen werden, heißt die Abscissenlinie, die Stücken von ihr, wie AE, die Abscissen, und der Punkt, wie A, der Anfang der Abscissen; die den Abscissen (AE) zugehörigen Linien (ED) oder die Functionen der Abscissen, heißen die Ordinaten, ordinatim applicatae, beyde gemeinschaftlich Coordinaten, und wenn sie auf einander senkrecht sind, rechtwinklichte Coordinaten, in welchem Falle die Abscissenlinie auch die Axe genannt wird.

Anmerkung. Hier schränken wir uns bloß auf rechtwinklichte Coordinaten ein, und bezeichnen durch x Abscissen, durch y Ordinaten, und durch a, b, c, u. s. w. beständige Größen.

§. 238. In der Gleichung für eine Linie §. 236. wird durch einen bestimmten Werth der Abscisse, auch der Werth der Ordinate, d. i. der Punkt der Linie bestimmt, welcher dieser Abscisse zugehört. Nun ist jeder Punkt der Linie in einer Ordinate, welcher eine Abscisse zugehört. Folglich lassen sich alle Punkte der Linie durch alle ungleiche Werthe der Abscisse bestimmen; wenn man nämlich durch das Ende jeder angenommenen Abscisse, eine gerade Linie, unter dem gegebenen Ordinatenwinkel (hier unter einem rechten) ziehet, und sie so groß macht, als die Gleichung bestimmt. Durch die so gefundenen Punkte läßt sich aus freyer Hand die krumme Linie und zwar desto genauer ziehen, je mehrere Punkte man gesucht hat.

§. 239. Da kein Punkt in der Linie ist, der sich nicht durch die Gleichung bestimmen ließe §. 238. so

so ist die Gleichung eine Definition der Linie, aus der sich alles, was der Linie zukömmt, herleiten lassen muß. So ist z. E. der Kreis diejenige krumme Linie, wo für rechtwinklichte Coordinaten $y^2 = ax - x^2$ ist.

§. 240. Nimmt man den Anfang der Absciſsen im Mittelpunkte C (Fig. 13) und ziehet für eine Absciſse, wie CP, die Ordinate PM: so ist CM der Halbmesser $= r$, und $y^2 = r^2 - x^2$ eine andere Definition des Kreises. Will man diese auf die vorige bringen, daß A der Anfang der Absciſsen: so ist hier $CP = AP - AC = x - r$. Setzt man daher in die neue Gleichung $x - r$ anstatt x: so erhält man $y^2 = r^2 - (x^2 - 2rx + r^2) = 2rx - x^2$, wie §. 239.

§. 241. So kann es also für eine und dieselbe Linie mehrere Definitionen geben, die von verschiedenen Eigenschaften solcher Linie hergenommen sind, aber sich eine auf die andere zurückführen lassen.

§. 242. Die Ordinaten, die auf entgegengesetzte Seiten der Absciſsenlinie, so wie die Absciſse, die auf entgegengesetzte Seiten ihres Anfangs, fallen, sind einander entgegengesetzt. Nennt man daher die Ordinaten über AB, und die Absciſsen von C nach B bejaht: so sind die Ordinaten unter AB, und die Absciſsen von C nach A verneint.

§. 243. Anmerkung. Die höhere Geometrie ist die Wissenschaft von den krummen Linien, und heißt daher auch Geometria curvarum. Denn es giebt außer der Kreislinie unzählige andere Curven, die sich auf die Art, wie am Kreise gezeigt worden ist, behandeln lassen; von denen aber hier nur die sogenannten Kegelschnitte (Ster. §. 84.) betrachtet werden sollen.

Die Parabel.

§. 244. Die Parabel ist diejenige krumme Linie, wo für rechtwinklichte Coordinaten $y^2 = px$ ist. Die beständige Linie p heißt der Parameter, und ist die dritte Proportionallinie zu der Abscisse und Ordinate; weil $\frac{y^2}{x} = p$, oder $x : y = y : p$ ist.

§. 245. Jeder Punkt der Parabel läßt sich mittelst der Elementargeometrie bestimmen.

Denn da $x : y = y : p$, so sey (Fig. 14.) AE = p, und AP = x, und über EP ein halber Kreis beschrieben, welcher den Perpendikel AG abschneidet; da dann PM = AG die zu AP gehörige Ordinate, wodurch der Punkt M in der Parabel bestimmt ist.

§. 246. Die Axe AQ halbirt die Parabel, wie der Durchmesser den Kreis.

Denn da $y = \mp \sqrt{px}$: so gehören zu jeder Abscisse, wie AP, zwey gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten PM, Pm, wie auch die Verzeichnung §. 245. giebt.

Anmerkung. Die Alten nannten daher die Sehnen der Parabel wie Mm, Ordinatas, und ihre Hälften PM, Semiordinatas. Die oben angenommenen Benennungen sind für alle Curven.

§. 247. Der Punkt der Abscissen A, wo die Axe von der Parabel geschnitten wird, weil für $x = 0$, auch $y = 0$ ist, heißt der Scheitel der Curve.

§. 248. Die Schenkel der Parabel gehen längst der Axe zu beyden Seiten ohne Ende fort, öffnen sich auch immer weiter aus einander; und

die

die ganze Parabel liegt auf einer Seite des Perpendikels durch A.

Denn 1.) für ein positives x, bleibt auch ax stets positiv, und wächst mit x zugleich, folglich auch $\sqrt{ax}$ oder $\mp y$, ohne Ende.

2.) für ein negatives x, wird auch ax negativ, folglich y unmöglich.

§. 249. Die Abscissen verhalten sich wie die Quadrate der Ordinaten, oder die Ordinaten wie die Quadratwurzeln der Abscissen.

Denn für AP ist $PM^2 = p.\ AP$, für AQ aber $QN^2 = p.\ AQ$, folglich $AP : AQ = PM^2 : QN^2$; folglich $PM : QN = \sqrt{AP} : \sqrt{AQ}$.

§. 250. Der Brennpunkt einer Curve heißt der Ort der Axe F, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich ist. (wo $FT = \frac{1}{2}p$.)

§. 251. Für die Parabel ist $AF = \frac{1}{4}p$; und $FM = x + \frac{1}{4}p$.

Denn 1) $FT^2 = p.\ AF = \frac{1}{4}p^2$ §. 250, folglich $AF = \frac{1}{4}p$.

2) $FM^2 = PM^2 + FP^2 = PM^2 + (AP - AF)^2$ d. i. $FM^2 = px + x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$, folglich $FM = x + \frac{1}{4}p$.

§. 252. Punkte der Parabel, wie §. 245, lassen sich auch auf folgende Art finden:

Auf einer geraden Linie EQ mache man $AF = AL = \frac{1}{4}p$: so ist F der Brennpunkt §. 251. Nun nehme man nach Gefallen AP, ziehe durch P einen Perpendikel, und aus F mit dem Halbmesser $LP = x + \frac{1}{4}p$, einen Kreis, welcher obigen Perpendikel in zwey Punkten der Parabel M, m, schneidet. §. 251.

Die Ellipse.

§. 253. Die Ellipse ist diejenige krumme Linie, wo für rechtwinklichte Coordinaten $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ ist. Von den beständigen Größen heißt p der Parameter, a die große Axe, axis transversus.

§. 254. Die Endpunkte der großen Axe AB (Fig. 15.) sind die Scheitel der Ellipse.

Denn für y = o kann x sowohl = o als auch = a seyn. Ist also A der Anfang der Abscissen und AB = a: so ist sowohl A als B in der Axe und Curve zugleich, folglich ein Scheitel. §. 247.

§. 255. Die Axe AB halbirt die Parabel, weil $y = \mp \surd \left[px - \frac{px^2}{a}\right]$ ist.

§. 256. Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Rectangel aus den Segmenten der Axe.

Denn aus §. 253. ist für zwey beliebige Ordinaten PM, QN, $PM^2 = p\left[\frac{a.\,AP - AP^2}{a}\right]$ und $QN^2 = p\left[\frac{a.\,AQ - AQ^2}{a}\right]$ folglich $PM^2 : QN^2 = (a - AP)\,AP : (a - AQ)\,AQ = BP.\,AP : BQ.\,AQ$.

§. 257. Die Mitte der großen Axe C heißt der Mittelpunkt der Ellipse; ein Perpendikel durch den Mittelpunkt Dd die kleine Axe, axis coniugatus. Sie heiße c: so ist $\frac{1}{2}c = \frac{\surd ap}{2}$, weil für $x = {}^{1}a$, $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{1}{4}ap = \frac{ap}{4}$, folglich $y = \mp \frac{\surd ap}{2}$ ist.

§. 258

§. 258. Der Parameter ist die dritte Proportionallinie zu der großen und kleinen Axe; weil $c^2 = ap$, folglich $\frac{a^2}{a} = p$, oder $a : c = c : p$.

§. 259. Eine zweyte Gleichung für die Ellipse, aus der großen und kleinen Axe ist: $y^2 = \frac{c^2 x}{c} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$; weil $p = \frac{c^2}{a}$ §. 258.

§. 260. Eine dritte Gleichung, wenn man in C den Anfang der Abscissen nimmt, und CP = u setzt, ist: $y^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$.

Denn für CP = u ist $x = \frac{1}{2} a - u$, welchen Werth man in die Gleichung §. 259. setzt.

§. 261. CD ist die größte Ordinate, und jede andere desto kleiner, je weiter sie von C ist.

Denn für u = o, ist $x = \frac{1}{2} c$; und wird immer kleiner, je größer u ist. §. 260.

§. 262. Die ganze Ellipse ist in der Fig. 15. enthalten.

Denn für $u = + \frac{1}{2} a$ ist $y^2 = o$, und für $u > \frac{1}{2} a$, wird y^2 negativ, folglich unmöglich.

§. 263. Die kleine Axe Dd halbirt auch die Ellipse, weil gleiche u zu beyden Seiten einerley y geben; und theilt sie also zugleich mit der Axe AB in vier congruente Quadranten.

§. 264. Eine vierte Gleichung, wenn man Axen und Coordinaten verwechselt, d. i. die Abscissen auf der kleinen Axe nimmt, daß CE = MP = y, und EM = CP = u wird, ist: $u^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2} = a^2 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{y^2}{c^2} \right\}$ §. 260.

§. 265.

§. 265. Die Ellipse hat zwey Brennpunkte F, f, deren Abstand vom Mittelpunkte CF = Cf = e, daß $e^2 = \frac{a^2 - c^2}{4}$, und FD = fD = $\frac{1}{2}$ a ist.

Denn 1.) für den Brennpunkt F ist $y^2 = \frac{1}{4} p^2$ §. 250. $= \frac{c^4}{4a^2}$ §. 258, folglich $\frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2}{a^2} . CF^2 = \frac{c^4}{4a^2}$ §. 260., folglich $\frac{1}{4} a^2 - CF^2 = \frac{1}{4} c^2$ folglich $\frac{a^2 - c^2}{4} = CF^2$

2.) $FD^2 = CD^2 + CF^2$ d. i. $= \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} c^2 = \frac{1}{4} a^2$, folglich FD $= \frac{1}{2}$ a.

§. 266. Die Weite des Brennpunkts vom Scheitel A ist $\frac{a \mp \sqrt{(a^2 - a p)}}{2}$ das obere Zeichen für AF, das andere für Af.

Denn diese Weite = AC $\mp$ CF $= \frac{1}{2} a - \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}$ §. 265., wo $c^2 = ap$ §. 257.

§. 267. Eine fünfte Gleichung, wenn man in f den Anfang der Abscissen nimmt, und fP = w setzt, ist: $y^2 = \frac{c^4}{4 a^2} + \frac{c^2 \sqrt{(a^2 - c^2)}}{a^2} . w - \frac{c^2 w^2}{a^2}$.

Denn fP = CP + CF, d. i. $w = u + \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$ §. 265, folglich $u = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2} - w$, folglich $u^2 = w^2 - w \sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} c^2$, welchen Werth man in die Gleichung §. 260 setzt.

§. 268.

§. 268. Die Summe der Linien von jedem Punkte der Ellipse nach den Brennpunkten, ist der großen Axe gleich, d. i. $MF + Mf = a$.

Denn 1.) $FM^2 = FP^2 + PM^2 = (e - u)^2 + y^2 = e^2 - 2eu + u^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$ §. 260.

Nun ist $e^2 = \frac{1}{4}a^2 - {}^1 c^2$ und $e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}$ §. 265.

Folglich ist $FM^2 = \frac{1}{4}a^2 - u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2 - c^2}{a^2}u^2$, folglich $FM = \pm\frac{1}{2}a \mp \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$ wo man die obern Zeichen nimmt, um einen positiven Werth zu erhalten, indem $\frac{1}{2}$ der größte Werth von u ist. §. 262.

2.) $fM^2 = (e + u)^2 + y^2$ und man findet auf eben die Art $fM = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$.

3.) Demnach ist $FM + fM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$.

§. 269. Punkte der Ellipse zu finden, beschreibe man mit einem beliebigen Stücke Z. der großen Axe einen Kreis aus F, und einen andern aus f mit $a - z$, deren Durchschnitt einen Punkt der Ellipse giebt. §. 268.

Anmerkung. Wird ein Faden, dessen Länge $= a$, mit beyden Enden in F, f, befestigt, und mit einem Stifte in die Lagen FMf ausgedehnt: so beschreibt der Stift die Ellipse mit einer stetigen Bewegung.

§. 270. Die Ellipse nähert sich dem Kreise desto mehr, je näher die Brennpunkte dem Mittelpunkte kommen.

Denn

Die Hyperbel.

§. 276. Die Hyperbel ist diejenige krumme Linie, wofür rechtwinklichte Coordinaten $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ ist. Auch hier bedeutet p den Parameter, und a die Axe, oder latus transversum.

Anmerkung. Diese Gleichung entsteht, wenn man in der Gleichung für die Ellipse §. 253. — a anstatt + a setzt.

§. 277. Die Endpunkte der Axe AB (Fig. 16.) sind die zwey entgegengesetzten Scheitel der Hyperbel.

Denn y wird = o für x = o und = — a. Ist daher A der Anfang der Abscissen, also zugleich der eine Scheitel, und AP eine positive Abscisse: so fällt der andere B auf die entgegengesetzte Seite, daß also AB — a negativ ist.

§. 278. Die Hyperbel geht von jedem Scheitel A, B aus, mit zwey Schenkeln, die sich immer weiter ausbreiten, ohne Ende fort, und wird von der Axe halbirt.

Denn 1) für jedes bejahte $x > o$, giebt es mögliche Ordinaten, die ohne Ende mit x zugleich wachsen, und für jedes + x giebt es zwey gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten.

2) für jedes verneinte $x > o$ und $< a$, ist in der Gleichung §. 276. $y^2 = px + \frac{px^2}{a} = px(1 + \frac{x}{a}) = \frac{px}{a}(a + x)$ der erste Factor für jedes — x verneint, der zweyte aber für dieses — x bejaht; daß also die Ordinaten unmöglich sind, d. i. daß es keine Punkte der Hyperbel giebt, deren Ordinaten zwischen A und B durchgiengen.

3) Wenn

3) Wenn aber eine $-x > a$: so wird auch der zweyte Factor verneint, folglich das Product bejaht, und die Ordinate wieder möglich, d. i. es giebt hier wieder Punkte der Hyperbel.

4) Je mehr das nunmehrige $-x$ wächst; desto mehr wächst das Product, folglich auch die Ordinate; und jeder solcher Abscisse gehören zwey entgegengesetzte, sonst gleiche Ordinaten zu.

§. 279. Heißt C, für $AC = \frac{1}{2} AB$, der Mittelpunkt der Hyperbel, und $\sqrt{ap} = c$ die kleine Axe, latus rectum (nach Aehnlichkeit der Ellipse §. 257.) folglich $ap = c^2$, und $p = \frac{c^2}{a}$: so ist hier $y^2 = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2x^2}{a^2}$ §. 276. eine zweyte Gleichung für die Hyperbel aus der großen und kleinen Axe, vergl. §. 259.

Anmerkung. Da es hier keine Ordinate durch den Mittelpunkt giebt §. 278; wohl aber bey der Ellipse §. 257: so kann man die Hyperbel als eine Ellipse betrachten, deren kleine Axe unmöglich wäre.

§. 280. Eine dritte Gleichung für die Abscissen aus dem Mittelpunkte $CP = u$ (wo also $x = u - \frac{1}{2}a$, und $x^2 = u^2 - au + \frac{1}{4}a^2$) ist nach §. 279: $y^2 = \frac{c^2u}{a} - \frac{1}{2}c^2 + \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2u}{a} + \frac{c^2}{4}$, oder $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$.

Anmerkung. Diese Gleichung entsteht aus §. 260, wen man dort $c\sqrt{-1}$ statt c setzt. Denn $(c\sqrt{-1})^2 = -c^2$.

§. 281. Der Perpendikel durch C theilt die Hyperbel in ähnliche Hälften, (die man insgemein

entgegengesetzte Hyperbeln nennt.) Auch liegen innerhalb der 4 rechten Winkel um C congruente Theile der Hyperbel §. 278. Alles wie §. 263.

§. 282. Die Hyperbel hat zwey Brennpunkte F, f, deren Abstand vom Mittelpunkt $CF = Cf = u = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$. Auch ist $AF = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)} - a}{2}$.

Denn für den Brennpunkt F ist $u^2 = \frac{1}{4} p^2$ §. 250. aber $p^2 = \frac{c^4}{a^2}$ §. 279. folglich ist $u^2 = \frac{c^4}{4a^2} = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$ §. 280. folglich $\frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4} = u^2$ und $\pm \frac{\sqrt{(c^2 + a^2)}}{2} = u$. Hienach ist $AF = CF - CA = \frac{\sqrt{(c^2 + a^2)}}{2} - \frac{a}{2}$.

§. 283. Die Differenz der Linien von jedem Punkte der Hyperbel nach den Brennpunkten ist der großen Axe gleich, d. i. $Mf - MF = a$.

Denn da $FM^2 = FP^2 + PM^2$, und $fM^2 = fP^2 + PM^2$; aber $FP = CP - CF$, und $fP = CP + Cf$: so findet man hieraus leicht, daß $FM = \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} - \frac{1}{2} a$, und $fM = \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} + \frac{1}{2} a$, folglich $fM - FM = a$ sey.

Anmerkung. Hieraus folgt die Verzeichnung der Hyperbel, wie bey Ellipse und Parabel. §. 269. 252.

§. 284. Hat man in dem Perpendikel durch A, $AD = AE = \frac{1}{2} c$ gemacht, und durch die Endpunkte D, E, und den Mittelpunkt C unbegränzte gerade Linien gezogen, die Asymptoten; so nähert sich

sich ihnen die Hyperbel immer mehr und mehr, ohne sie doch jemahls zu erreichen.

Denn es ist CA : AE = CP : PR, oder wenn PR = z, $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}c = u : z$, folglich $z = \frac{cu}{a}$, folglich $z^2 - y^2$ d. i. $(z+y)(z-y) = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2u^2}{a^2} + \frac{1}{4}c^2$ §. 280 $= \frac{c^2}{4}$, folglich MR = $z - y = \frac{c^2}{4(z+y)}$.

Zusatz. Da MR = $z - y$, und Mr = $z + y$, aber $(z+y)(z-y) = \frac{1}{4}c^2$: so ist MR. Mr = $\frac{1}{4}c^2$, folglich unveränderlich.

§. 285. Ziehet man MQ der Cr parallel: so kann man CQ = p, und QM = q als Coordinaten auf der Asymptote ansehen; da dann eine Gleichung der Hyperbel zwischen den Asymptoten ist: $pq = \frac{a^2+c^2}{16}$.

Denn da MQ der Cr parallel: so sind die Winkel bey M, r, folglich auch bey M, R, gleich, folglich ist RQ = QM. Auch ist DE = c, und Mr = $z + y$, ferner $CD^2 = CA^2 + AD^2, = \frac{a^2+c^2}{4}$, und daher $CD = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{2}$.

Nun ist ED : DC = Mr : CQ d. i. $c : \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} = z + y : CQ$, folglich $CQ = \frac{(z+y)\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c}$. Ferner ED : DC = RM:

MQ d. i. c : $\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} = \frac{c^2}{4(z+y)}$: MQ, folglich $MQ = \frac{c^2}{4(z+y)} \cdot \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c}$. Demnach ist CQ . QM, d. i. $pq = \frac{a^2+c^2}{16}$.

§. 286. Ziehet man auch AG der Cr parallel: so ist $CG^2 = \frac{a^2+c^2}{16}$ und heißt die Potenz der Hyperbel.

Denn es ist $CG \cdot GA = pq = \frac{a^2+c^2}{16}$ §. 285. Nun ist AG der Cr parallel, und daher GAC = ACE = ACG, also AG = CG. Folglich ist $CG \cdot GA = CG^2 = \frac{a^2+c^2}{16}$.

§. 287. Wenn eine nach Willkühr gezogene Linie Rr die Asymptoten in R, r, und die Hyperbel in M, m schneidet: so ist allemahl MR = mr.

Denn ziehet man MQ, mq, den Asymptoten parallel: so ist MR : MQ = Rr : Cr = Rm : Cq, folglich $MR = \frac{MQ \cdot Rm}{cq}$. Eben so ist mr : mq = Rr : CR = Mr : CQ, folglich $mr = \frac{mq \cdot Mr}{CQ}$. Demnach ist
MR : mr = MQ . CQ . Rm : mq . Cq . Mr. Aber MQ . CQ = mq . Cq §. 285. Folglich MR : mr = Rm : Mr = MR + Mm : Mr + Mm, d. i. MR = mr.

§. 288. Ist also die Lage der Asymptoten, nebst einem Punkte M der Hyperbel gegeben: so findet man ihre übrigen Punkte, wenn man durch M meh-

M mehrere Linien, wie RMr, leget, und immer MR = mr macht. M kann man auch auf die entgegengesetzte Seite übertragen, und so die entgegengesetzte Hyperbel finden.

§. 289. Eine Hyperbel, deren beyde Axen einander, folglich auch dem Parometer, gleich sind. heißt gleichseitig, auch rechtwinklicht; und ihre Gleichung ist $y^2 = u^2 - \frac{1}{4}a^2$.

Denn 1) für sie ist CA = AD, folglich ACD = $\frac{1}{2}$R, also der Asymptoten-Winkel DCE = R. 2) Setzt man a anstatt c in §. 279 und 280: so erhält man $p = \frac{a^2}{a} = a$ und $y^2 = u^2 - \frac{1}{4}a^2$.

IX.

Statik.

§. 290.

Für die Theorie des Hebels (Statik. §. 46. 47. Fig. 6).

I. Am einarmigen Hebel CDB, sey CB = n. CD; und S = nQ mit Q im Gleichgewichte. Man mache CA = CD, nehme S hinweg, und hänge P = S = n. Q an A: so hält auch am zweyarmigen Hebel P mit Q das Gleichgewicht, und es trägt die Unterstützung C eine Last = P + Q = (n + 1) Q, welche daher am einarmigen Hebel ACB in der Entfernung AC = CD mit Q in der Entfernung AB =

 (n +

(n + 1) CD das Gleichgewicht hält. Demnach kann man von der nfachen Kraft und Entfernung auf die (n + 1) fache schließen. Nun ist der Satz vom 2 und 3fachen bewiesen. Folglich gilt er auch vom 4fachen, folglich auch vom 5fachen, u. s. w. ohne Ende, und ist also allgemein.

II. Am zweyarmigen Hebel ACB sey P : Q = CB : AC = m : n, (wo m, n ganze Zahlen) folglich mQ = nP. Nun sey CE = $\frac{1}{m}$ CB = $\frac{1}{n}$ AC, weil m, n, ganze Zahlen sind, und man lasse in E eine Kraft W = nP abwärts; und eine andere V = mQ aufwärts ziehen: so ist nach dem bereits erwiesenen unter diesen 4 Kräften ein Gleichgewicht welches auch, wenn man V = W = mQ = nP wegnimmt, zwischen P und Q bleibt. Nun läßt sich jede rationale Verhältniß durch ganze Zahlen ausdrücken, und jede irrationale einer rationalen so nahe man will bringen. Folglich ist der Satz allgemein bewiesen.

Anmerkung. Das Gesetz des Hebels ist zuerst vom Hrn. Hofrath Kästner gründlich erwiesen worden.

§. 291. Für die gleicharmige Wage (Stat. §. 70. hier Fig. 17.)

I) In der Mitte des Wagebalkens, oder des physischen Hebels, ist 1) die Zunge KL senkrecht auf der geraden Linie AB, die durch des Balkens Schwerpunkt G, und die Aufhängepunkte A, B, der gleich schweren Wagschalen gehet. 2) ein cylindrischer unten geschärfter Zapfen C, senkrecht auf den verticalen Durchschnitt durch G, welcher sich in den beyden Pfannen der Scheere oder Zange,

ge, woran der Wagebalken hängt, frey drehen kann.

II. Die Unterstützung C in der verticalen Linie durch den Schwerpunkt G, ist in der Zeichnung etwas über demselben, daß dieser also nebst dem horizontalen Balken in Ruhe bleibt, so lange die Gewichte völlig gleich sind. Ist aber das Gewicht an der einen Seite B etwas größer: so rückt der Schwerpunkt nach D, und der Balken kömmt nicht eher in Ruhe, als bis CD vertical wird, folglich den Winkel DCG durchgegangen ist.

III. Dieser Winkel DCG bestimmt den Ausschlag der Wage, und ist bey einerley Gewichte an B; d. i. bey gleicher Größe der GD, desto kleiner, je höher C über G, und desto größer, d. i. die Wage desto schneller oder empfindlicher, je näher C der G ist, bis C in oder gar unter G kömmt; da dann die Wage zur Beschwerde empfindlich ist, und ganz überschlägt.

IV. Die Länge der Arme vermehrt die Empfindlichkeit der Wage, da sie dem Ueberschusse des einen Gewichts ein größeres Moment giebt. Die Zunge, die beym Ausschlage aus der verticalen Scheere austritt, dient, solchen Ausschlag merklich zu machen, und zwar desto mehr, je länger sie ist.

V. Hieraus ergiebt sich der Unterschied zwischen den feinen Wagen, als Goldwage, Probierwage, hydrostatische Wage, bey denen das kleinste Gewicht einen Ausschlag geben muß; und den gemeinen Wagen, dergleichen die Kammerwage ist, bey denen es nicht auf Grane ankommt. Bey jenen sind Arme und Zunge fein und lang, und C nahe

he über G; bey diesen sind Arme und Zunge stärker und kürzer, und C weiter über G.

VI. Sind die Arme AG, GB, nicht genau von gleicher Länge, wie sie doch seyn sollten: so heißt dies eine falsche Wage. Denn hält das Gewicht P an A mit der Masse Q an B das Gleichgewicht: so ist $P : Q = GB : AG$. Ist nun $GB > AG$, so ist auch $P > Q$, d. i. die Masse Q wiegt nicht so schwer, als ihr Gegengewicht P anzeigt.

VII. Will man auf der falschen Wage dennoch das wahre Gewicht der Masse Q finden: so lege man sie in die andere Wagschale, und bringe sie auch mit dem Gewichte p an B ins Gleichgewicht; da dann zuvor $P : Q = GB : AG$, jetzt $Q : p = GB : AG$; folglich $P : Q = Q : p$, folglich $Q = \sqrt{Pp}$.

§. 292. **Aufgabe.** Die Römische Wage (Stat. §. 70. hier Fig. 19) gehörig abzutheilen.

Auflösung. Sind die Gewichte K, L, M, N, etc. am kurzen Arme CA, nebst dem unveränderlichen Gegengewichte P, welches in der Entfernung CD mit K das Gleichgewicht hält, gegeben: so findet man die Abtheilungen am langen Arme $DE = (L - K)\frac{CA}{P}$; $EF = (M - L)\frac{CA}{P}$; $FB = (N - M)\frac{CA}{P}$; u. s. w.

Beweis. Es sey R das Gewicht des langen Arms im Schwerpunkte E, S das Gewicht des kurzen Arms im Schwerpunkte G vereinigt, T das Gewicht der Wagschale. Wären nun nach einander in der Wagschale die Gewichte K, L, M, N etc. mit dem

unver-

unveränderlichen Gewichte P in D, E, F, B etc. im Gleichgewichte: so hätte man folgende Gleichungen:

$$K. CA + S. CG + T. CA = P. CD + R. CE$$
$$L. CA + S. CG + T. CA = P. CE + R. CE$$
$$M. CA + S. CG + T. CA = P. CF + R. CE$$
$$N. CA + S. CG + T. CA = P. CB + R. CE$$

u. s. w.

Subtrahirt man nun die 1ste von der 2ten, die 2te von der 3ten, die 3te von der 4ten u. s. w. so erhält man:

$$(L-K) CA = P. DE, \text{ folglich } \frac{(L-K) CA}{P} = DE$$

$$(M-L) CA = P. EF, \text{ folglich } \frac{(M-L) CA}{P} = EF$$

$$(N-M) CA = P. FB, \text{ folglich } \frac{(N-M) CA}{P} = FB$$

u. s. w.

1) Wären nun die Gewichte K, L, M, N, etc. in arithmetischer Progression (daß $L - K = M - L = N - M$ etc) so müßten auch die Theile, DE, EF, FB etc. gleich seyn. Macht man diese nun auch dem kurzen Arme CA gleich: so erhält man $\frac{L-K}{P} = 1$, folglich $L - K = P$, d. i. das Gegengewicht P muß der Differenz der Glieder der Progression gleich seyn.

2) Setzt man die Wage für sich ins Gleichgewicht (welches für die Praxis am bequemsten ist) indem man ein Gewicht T in die Wagschale legt, welches dem Uebergewichte des langen Arms das Gleichgewicht hält: so ist $S . CG + T . CA = R . CE$, folglich $K. CA = P . CD$. Macht man nun CD =

CA: so ist K = P, folglich (weil L — K = P war) L = 2 K = 2 P u. s. w.

Sind demnach die Theile am langen Arme, dem kurzen Arme gleichgemacht: so hält das Gegengewicht P in D, E, F, B ꝛc. den Gewichten P, 2 P, 3 P, 4 P ꝛc. am kurzen Arme das Gleichgewicht.

3) Man kann die gleichen Theile DE, EF, FB ꝛc. noch weiter für die Gewichte eintheilen, die zwischen P, 2 P, 3 P ꝛc. fallen.

Es sey z. E. ein Zwischengewicht $P + \frac{m}{n}P$, daß $\frac{m}{n}$ ein ächter Bruch: so wird aus obiger Gleichung $DE = \frac{(L-K)\,CA}{P}$ nunmehr $x = \frac{\frac{m}{n}\,.\,P\,.\,CA}{P} = \frac{m}{n}\,.\,CA = \frac{m}{n}\,.\,DE$, d. i. die kleinern Theile des Gewichts P verhalten sich wie die kleinern Theile der Abtheilung DE. Eben dies gilt auch für die folgenden Abtheilungen EF, FB ꝛc.

Anmerkung. Eine solche Wage hat nicht nur den Vortheil, daß man nur eines einzigen Gegengewichts bedarf; sondern auch, daß sie die Unterlage weniger beschwert, als die gleicharmige Wage. Indeß ist ihr langer Arm der Gefahr der Beugung mehr unterworfen.

§. 293. Aufgabe. Die Schwedische Wage (Stat. §. 70. hier Fig. 18.) gehörig abzutheilen.

Auflösung. Hier ist in A eine schwere Masse, in B die Wagschale, in C der Schwerpunkt der ganzen Wage, deren Gewicht P, und D der schiebbare

Ring.

Ring. Ist nun Q das Gewicht der Waare: so ist $Q . BD = P . CD = P . (BC - BD)$ folglich $(Q + P)\ BD = P . BC$, folglich $BD = \frac{P . BC}{Q + P}$. Kennt man daher BC und P: so läßt sich hiernach der Wagebalken für die verschiednen Gewichte Q leicht eintheilen.

§. 294. Für die eigenen Schweren (Stat. §. 72 — 76.) Bedeuten P, p, π; V, v: G, g, Gewichte, Räume und Schweren oder Dichtigkeiten: so ist nach dem Begrif der eigenen Schwere (Stat. §. 22. 23) wenn $G = g$; $V : v = P : \pi$ und wenn $V = v$; $G : g = \pi : p$, folglich

I. $GV : gv = P : p$, oder $GVp = gvP$. Daher

II. $V : v = Pg : pG = \frac{P}{G} : \frac{p}{g}$.

III. $G : g = vP : Vp = \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$.

Hieraus folgt: 1) wenn $P = p$, auch $GV = gv$ folglich $G : g = v : V$. 2) wenn $V = v$, auch $Pg = pG$, folglich $G : g = P : p$. 3) wenn $G = g$, auch $vP = Vp$, folglich $P : p = V : v$.

Man pflegt auch in I. II. III. homologe Glieder als einander gleich anzusetzen; z. E. $G = \frac{P}{V}$, wodurch man aber nichts anders, als die Proportion III versteht. Nur alsdann würde solches eine eigentliche Gleichung, wenn man eine gewisse Schwere γ, die man aus den gegebenen g, v. p, ein für allemahl berechnete, für die Einheit annähme, womit man, als mit einem beständigen Maasstabe, die Schweren aller andern Körper ausmessen wollte. Denn

Denn alsdann hätte man aus III. $\frac{P}{v} : 1 = g : \gamma$, oder $\gamma = \frac{gv}{p}$; und $G = \frac{gv}{p} \cdot \frac{P}{V} = \gamma \cdot \frac{P}{V}$, eine eigentliche Gleichung; worinn nur alles, was von einerley Art ist, auch durch einerley Einheit auszudrücken ist, und welche alsdenn anzeigt, daß γ in G so oft enthalten sey, als der Quotient $\frac{P}{V}$ anzeigt.

Aus $G = \frac{gv}{p} \cdot \frac{P}{v}$ folgt zugleich $P = GV. \frac{p}{gv}$, oder wenn man $\frac{p}{gv} = \pi$ setzt, $P = \pi . GV$, eine eigentliche Gleichung, statt der uneigentlichen $P = GV$. Eben so erhält man auch $V = \frac{gv}{p} \cdot \frac{P}{G}$, anstatt $V = \frac{P}{G}$.

Anmerkung. Diese Gleichungen sowohl, als die obigen Proportionen, sind für das folgende von großer Brauchbarkeit. Gleich jetzt ein Beyspiel von Anwendung sey dieses: Um die eigenen Schweren der Metalle bequem mit einander zu vergleichen, verwandle man sie, mittelst des Drathziehens, in Cylinder von gleicher Dicke, die sich also wie ihre Längen verhalten, und mache sie mittelst der Wage von gleichem Gewichte; da dann $G : g = v : V$, oder die eigenen Schweren, wie die Längen umgekehrt.

§. 295. Für das Parallelogramm der Kräfte (Stat. §. 85. Fig. 9. hier Fig. 23.)

I. Von diesen 3 Kräften verhält sich jede wie der Sinus des Richtungswinkels der beyden übrigen. Denn da CG = FH, so ist P : Q : R = CG : FG : CF, folglich = sin. GFC : sin. GCF : sin. CGF

CGF. §. 194. Nun ist GCF = HFC, und CGF + HFG = 2 R (Plan. §. 94.) und daher sin. CGF = sin. HFG. §. 172. Folglich ist P:Q:R = sin. GFC: sin. HFC : sin. HFG, oder wenn diese Winkel nach der Ordnung m, n, α heißen, P, Q, R = sin. m: sin. n: sin. α, wo $\alpha = m + n$, $m = \alpha - n$, und $n = \alpha - n$. Soll man aus zwey Kräften und dem eingeschlossenen Winkel, die dritte Kraft finden: so suche man erst einen zweyten Winkel §. 200. Unmittelbar aber findet man die dritte Kraft aus §. 207, 1.

II. Werden die Richtungen der Kräfte mit einer geraden Linie NCT beliebig geschnitten: so verhält sich jede dieser Kräfte (z. E. P) wie der abgeschnittene Theil ihrer Richtung (FN) multiplicirt in den Theil (CT) der schneidenden Linie zwischen den Richtungen der beyden übrigen Kräfte. Oder, so ist P : Q : R = FN . CT : FT . CN : FC . NT.

Denn da CG mit FN, und CH mit FT parallel: so ist NT : FN = CT : CG, und NT: FT = CN : CH (Plan. §. 210.) folglich $CG = \frac{FN.CT}{NT}$, und $CH = \frac{FT.CN}{NT}$. Nun ist P: Q : R = CG : CH : FC. Folglich ist $P : Q : R = \frac{FN.CT}{NT} : \frac{FT.CN}{NT} : FC = FN.CT : FT.CN : FC.NT$.

III. Ziehet man beliebig SLV der NCT parallel: so ist FN : FT : FC = SN : VT : LC. Hierdurch wird aus II auch die, P:Q:R = SN. CT : VT . CN : LC . NT.

Je weiter sich nun der Punkt F entfernt, folglich je kleiner der Richtungswinkel NFT wird, desto

sto weniger sind die Linien SN, VS, LC von einander unterschieden, bis sie, wenn F unendlich weit ist, d. i. die Richtungen der Kräfte parallel sind, völlig gleich werden, und alsdann P : Q : R = CT : CN : NT sey, was auch NCT für eine Lage habe; auch R = P + Q werde.

§. 296. Für die Scheibe (Stat. §. 112. Fig. 15) Setzt man ACB = u, CA = CB = a, AB = c: so findet man die trigonometrische Berechnung §. 205.

§. 297. Für die schiefe Fläche (Stat. §. 135. Fig. 18. hier Fig. 24) Die Kraft ziehe in einer beliebigen Richtung dv, welche die schiefe Fläche ab unter dem Winkel dkb = y schneide, der so wie der schiefen Fläche Neigungswinkel abc = x gegeben sey P, Q, R, bedeuten noch Kraft, Last und Druck auf die schiefe Fläche; ds sey senkrecht auf ab, und dp auf bc. Nimmt man nun dp für das Gewicht der Last, und ziehet ps mit dv, und sv mit dp parallel: so ist P : Q : R = dv : dp : ds = sin. pds : sin. vds : sin. vdp. §. 295.

Nun ist wegen des rechten Winkels bey h und f, hde = 90° — e folglich sin hde oder sin. pds = cos. e = sin. x; und im △ dhk der Winkel bey d = 90° — y, folglich sin. vds = cos. y; auch kde = 180° — y — (90° — x) = 90° — (x — y), folglich sin. kde, oder sin. vdp = cos. (x — y). Demnach ist P : Q : R = sin. x : cos. y : cos. (x — y).

Ziehet man vr, pg, mdn, auf ds senkrecht: so werden dadurch die Kräfte P und Q in Seitenkräfte zerlegt, daß man von jeder ihren Druck auf die schiefe Fläche bestimmen kann.

Ist die Richtung der Kraft der Länge parallel: so ist y = o, folglich $P = \frac{\text{sin. x}}{\text{cos. y}} Q$ = sin. x . Q, und

und R $= \frac{\text{cos. } x - y}{\text{cos. } y}$ Q $=$ cos. x . Q. Ist sie hingegen der Grundlinie parallel: so ist y $=$ x, folglich P $= \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}$ Q $=$ tang. x . Q, und R $=$ $\frac{1}{\text{cos. } x}$ Q.

§. 298. Für die Friction (Stat. §. 160). Soll der Körper sich selbst auf der schiefen Fläche halten, so muß sein relatives Gewicht P der Friction, die aus dem Druck R, wovon sie $\frac{1}{m}$ sey, entstehet, gleich seyn, demnach ist aus §. 297. am Ende Q. sin. x $= \frac{1}{m}$ Q. cos. x, oder m $= \frac{\text{cos. } x}{\text{sin. } x} =$ cot. x; wodurch man entweder x aus m, oder m aus x findet.

§. 299. Für communicirende Gefäße (Hydrost. §. 23. Fig. 25.) bedeuten g, γ, die eigenen Schweren: so ist AB . AE . g . $=$ AB . FD . γ, oder AE . g $=$ FD . γ, folglich g : γ $=$ FD : AE.

§. 300. Für feste Materien in flüßigen (Hydrost. §. 28. Fig. 24). Das Gewicht des festen Körpers S sey $=$ p, und einer gleichen Portion der Flüßigkeit $=$ m: so sind beyde Kräfte einander entgegengesetzt, folglich das Resultat p — m. Ist nun p $=$ m, so bleibt S in der einmahl eingenommenen Stelle. Ist p $>$ m, so sinkt S mit dem Ueberschusse seines Gewichts p — m. Ist p $<$ m, so wird p — m negativ, d. i. S wird von der Flüßigkeit mit dem Ueberschusse ihres Gewichts m — p gehoben. Kömmt S empor, so vermindert sich m, bis m $=$ p wird, da dann die Flüßigkeit keine

Kraft

Kraft hat, den Körper S weiter zu heben, so wie S keine, tiefer zu sinken. Das Gewicht einer andern Flüssigkeit sey $= n$, so hat man hier $p - n$. Aehnliche Schlüsse gelten, wenn S auch eine Flüssigkeit wäre.

§. 301. Für (Hydrost. §. 33.) Es verliere die Glasperle am Gewichte in der einen Flüssigkeit m, in der andern n: so sind dieses die Gewichte beyder Flüssigkeiten von einerley Raume §. 300. Folglich verhalten sich ihre eigenen Schweren, wie diese Gewichte §. 294.

§. 302. Für (Hydrost. §. 37.) Bedeuten G, g, die eigenen Schweren zweyer festen Körper; a, b, ihre Gewichte in freyer Luft; α, β, ihr Verlust im Wasser, dessen eigne Schwere γ: so ist nach §. 294. 300.

$G : \gamma = a : \alpha$, folglich $G = \frac{a}{\alpha} \cdot \gamma$

$\gamma : g = \beta : b$, folglich $g = \frac{b}{\beta} \cdot \gamma$. Desgleichen $G : g = a\beta : \alpha b$.

§. 303. Für die bekannte Archimedische Aufgabe (Hydrost. §. 52.) sey, nach Herrn Hofr. Kästner, vom Metall A, das Gewicht a, der Verlust im Wasser α, die eigene Schwere f; vom Metall B bedeuten b, β, g, das ähnliche; so auch für die Mischung aus beyden m, μ, h. Nun sey vom ersten Metall in der Mischung das Gewicht x, folglich vom zweyten $m - x$; und die eigene Schwere des Wassers $\gamma = 1$: so ist nach §. 302. $f = \frac{a}{\alpha}$, und der Raum von x, $= \frac{x}{f}$; $g = \frac{b}{\beta}$, und der

Raum

Raum von m — x, $= \frac{m - x}{g}$; $h = \frac{m}{\beta}$, und dieser Raum $= \frac{m}{h}$. Demnach ist $\frac{x}{f} + \frac{m - x}{g} = \frac{m}{h}$, folglich $hgx + mfh - fhx = mfg$, oder $x = \frac{mf(g - h)}{h(m - f)}$.

§. 304. Für schwimmende Körper (Hydrost. §. 44. Fig. 26.) I. Es sey die eigene Schwere der Flüßigkeit $= \gamma$, des schwimmenden Körpers $= g$, sein Inhalt $= V$, des eingetauchten Theils $= v$: so ist gV das absolute Gewicht des schwimmenden Körpers, und γv der verdrängten Flüßigkeit; folglich $gV = \gamma v$, und $g : \gamma = v : V$.

II. Zwey Körper sind mit einander verbunden, daß sie noch denselben Raum ausmachen; man sucht des Ganzen Verlust im Wasser x, wenn die Buchstaben aus §. 302. genommen worden, und $\gamma = 1$ gesetzt wird. Demnach ist $x = \alpha + \beta = \frac{a}{G} + \frac{b}{g}$, und das Ganze sinkt, wenn $x < a + b$, und schwimmt, wenn $x = a + b$.

III. Ist das Gewicht eines schwimmenden Körpers $= p$, der eingetauchte Raum $= v$, die eigene Schwere der Flüßigkeit $= \gamma$: so ist $p = \gamma v$, folglich $v = \frac{p}{\gamma}$, und $\gamma = \frac{p}{v}$.

IV. Ist p das Gewicht eines Körpers schwererer Art, der in einem Raum z ausgedehnt ist, daß er in einer Flüßigkeit, deren eigene Schwere γ ist, schwimmen soll: so muß seyn $p = \gamma z$ folglich $z = \frac{p}{\gamma}$.

§. 305. Für (Hydrost. §. 50.) sey das Gewicht des festen Körpers $= p$, einer gleichen Portion Wasser $= m$: so wird der Körper mit einer Kraft $= m - p$ aufwärts getrieben, folglich mit einem Gewichte $\pi = m - p$ erhalten. Demnach ist $\pi + p = m$, folglich die gesuchte Verhältniß $= \frac{p}{\pi + p}$.

§. 306. Für (Hydrost. §. 51. Fig. 26.)

I. Die eigenen Schweren zweyer Flüßigkeiten seyen g, γ. In beyden stehe die Senkwage bis E, auch sey der eingetauchte Theil $BACE = v$: so ist $p = g\,v$, und $p \mp q = \gamma\,v$, folglich $g : \gamma = p : p \mp q$.

II. Das Gewicht der Senkwage p, bleibe unverändert. In der ersten g, stehe sie bis E, daß $BE = v$, in der andern γ aber bis D, daß $BD = w$: so ist $p = g\,v = \gamma\,w$, folglich $g : \gamma = w : v$.

Da aber bey der Form des Instruments v, w sich nicht geometrisch bestimmen lassen: so dient die Gleichung $p = g\,v$ hiezu auf folgende Art: Man bemerke die Punkte, wo das Instrument in der leichtesten und schwersten der flüßigen Massen, die man abwägen will, stehet, und theile die Länge zwischen beyden Punkten beliebig. In einer flüssigen Masse, deren eigene Schwere g bekannt ist, senke man das Instrument mittelst aufgelegter Gewichte p nach und nach bis auf alle Theilpunkte; da sich dann v aus der Gleichung $p = g\,v$ ergiebt.

§. 307. Für (Aerom. §. 43.) wenn man voraussetzt, daß bey der Dilation die Luft sich jedesmal gleichförmig verbreite, und bey der Compression ganz in den Recipienten ziehe.

I. Der innere Raum des Recipienten und der Verbindungsröhre bis zum Boden des Stiefels sey $= a$,

= a, der Raum des Stiefels bis zum aufgezogenen Kolben = b; die natürliche zuerst im Recipienten befindliche Luft = p, die nach einer gegebenen Zahl von Auspumpungen noch vorhandene = q, und die nach der nächsten Auspumpung, = r: so ist a + b : a = q : r, und $r = \frac{a}{a+b} \cdot q$, folglich bey der ersten Auspumpung, q = p, und $r = \frac{a}{a+b} \cdot p$, folglich bey der zweyten $q = \frac{a}{a+b} \cdot p$, und $r = \frac{a}{a+b} \cdot q = \left[\frac{a}{a+b}\right]^2 \cdot p$. Eben so nach der dritten, $r = \left[\frac{a}{a+b}\right]^3 \cdot p$, und allgemein nach der nten, $r = \left[\frac{a}{a+b}\right]^n \cdot p$, folglich $\frac{r}{p} = \frac{a^n}{(a+b)^n}$.

II. Bedeuten obige Buchstaben noch dasselbe, nur daß man Compression anstatt Auspumpung setzt: so ist hier a : a + b = q : r folglich $= \frac{a+b}{a} \cdot q$, folglich nach der ersten Compressiion, $r = \frac{a+b}{a} \cdot p$, nach der zweyten, $r = \left[\frac{a+b}{a}\right]^2 \cdot p$, nach der nten, $r = \left[\frac{a+b}{a}\right]^n p$, folglich $\frac{r}{p} = \left[\frac{a+b}{a^n}\right]^n$.

§. 308. Für die Höhenmessung mittelst des Barometers (Aerom. §. 56. hier Fig. 21.)

Hier ist bloß die Absicht, von dem Allgemeinen dieser sinnreichen Methode, und deren ersten Gründen in möglichster Kürze Anfängern einen deutlichen Begriff zu geben.

1.) Ueber der Oberfläche des Meeres in A denke man sich eine Luftsäule bis ans Ende der Atmosphäre, in Schichten 1, 2, 3 ... von sehr kleinen, aber gleichen Höhen Aa, ab, bc.... eingetheilt, daß man ohne merklichen Fehler die Luft in jeder dieser Schichten als von gleichförmiger Dichtigkeit α, β, γ .... setzen kann, indem das Gewicht der Luft in jeder Schichte a, b, c.... und das Gewicht der ganzen Atmosphäre, die auf jede Schichte drückt, A, B, C....ist; welches alles folgende Uebersicht deutlich macht.

1	2	3	4	......	m	....	n	......
α	β	γ	δ		e		T	
a	b	c	d		r		t	
A	B	C	D		R		T	

Ist nun das Gewicht der ganzen Atmosphäre, die auf A drückt, $= P$: so ist $A = P - a$; $B = P - a - b$, $C = P - a - b - c$ u. s. w.

2) Da die Schichten von gleicher Größe sind: so verhalten sich ihre Gewichte, a, b, c ꝛc. wie ihre Dichtigkeiten α, β, γ ꝛc. Diese aber, nach dem Mariottischen Gesetze (Aerom. §. 35.) wie die darauf drückenden Kräfte. Demnach hat man

$$a : b = P - a : P - a - b$$
$$b : c = P - a - b : P - a - b - c$$
$$c : d = P - a - b - c : P - a - b - c - d$$

u. s. w.; folglich nach (Arithm. §. 169.)

$$P - a + a : P - a = P - a - b + b : P - a - b$$

$$P - a - b + b : P - a - b = P - a - b - c + c : P - a - b - c \text{ u. s. w.}$$

d. i. $P : P - a = P - a : P - a - b$

$P - a : P - a - b = P - a - b : P - a - b - c$

oder $P : A = A : B$

$A : B = B : C$

d. i. $\div P . A . B . C \ldots$ wo der Name $\frac{A}{P}$,

oder $\div P, \left[\frac{A}{P}\right] . P, \left[\frac{A}{P}\right]^2 P, \left[\frac{A}{P}\right]^3 P \ldots$

Demnach ist auch $R = \left[\frac{A}{P}\right]^m P$, und $T = \left[\frac{A}{P}\right]^n P$ folglich $\frac{R}{P} = \left[\frac{A}{P}\right]^m$, und $\frac{T}{P} = \left[\frac{A}{P}\right]^n$

oder $\log. \frac{R}{P} : \log. \frac{T}{P} = m \log. \frac{A}{P} : n \log. \frac{A}{P} = m : n$.

3.) Da sich m, n, wie die Menge der Theile, die auf BC, BD gehen, d. i. wie diese Höhen verhalten; und bey unveränderter Wärme die Gewichte oder Pressungen der Atmosphäre P, R, T, wie die Barometerhöhe bey B, C, D: so siehet man deutlich ein, wie in obiger Proportion diese anstatt jener zu setzen, und daher aus den Barometerhöhen die Höhen der Oerter zu berechnen sind.

X.

Mechanik.

§. 309.

So lange ein Körper seinen Ort unverändert beybehält, ruhet er; so lange er seinen Ort ändert, bewegt er sich. Dies heißt absolute Ruhe und Be-

Bewegung, die von der relativen, bey der man nur die Lage gegen gewisse Körper betrachtet, wohl zu unterscheiden ist. Z. E. die Ruhe auf meinem Zimmer ist nur relativ, weil das Zimmer mit der Erde eine absolute Bewegung hat.

§. 310. Bey der Bewegung siehet man:

1. auf den bewegten Körper, den man hier als einen bloßen Punkt betrachtet.
2. auf den Weg oder Raum, den er zurücklegt oder beschreibet, bey dem man sich eine bloße Linie gedenkt.
3. auf die Richtung, (d. i. die gerade Linie, in der er geht, oder zu gehen strebt,) welche er während seiner Bewegung entweder stets beybehält, oder stets ändern muß; wodurch die Bewegung im ersten Falle geradlinicht, im zweyten krummlinicht wird.
4. auf die Zeit, in welcher er den beschriebenen Raum zurücklegt, und welche in Verbindung mit der Größe dieses Raums seine Geschwindigkeit bestimmt.

§. 311. Die Bewegung ist gleichförmig, motus uniformis, wenn der bewegte Punkt in allen gleichen Zeittheilchen auch gleiche große Räume beschreibt, d. i. stets einerley Geschwindigkeit behält; verändert, motus variatus, hingegen, wenn dies nicht ist. Im letztern Falle heißt sie beschleunigt, acceleratus, oder verzögert, retardatus, je nachdem die Geschwindigkeit wächst, oder abnimmt. Bleibt hiebey die Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit in gleichen Zeiten stets von gleicher Größe: so giebt dies eine gleichförmige Beschleunigung und Verzögerung.

§. 312. Bedeuten C, c, γ, Geschwindigkeiten, S, s, Räume, T, t, Zeiten: so ist nach §. 311. für die gleichförmige Bewegung,
bey gleichen Zeiten, $C:\gamma = S:s$ und
bey gleichen Räumen, $\gamma : c = t : T$, folglich

I. $C : c = St : sT = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, oder $CTs = ctS$.

Daher

II. $S : s = CT : ct$

III. $T : t = Sc : sC = \frac{S}{C} : \frac{s}{c}$.

Oder auch in dem Sinne, wie §. 294.

$C = \frac{S}{T}$; $S = CT$; $T = \frac{S}{C}$.

§. 313. In (Stat. §. 1 bis 4) ist der Begrif der Kraft festgesetzt worden. Der hiebey gedachte Widerstand, den jeder Körper aller Veränderung seines Zustandes (der Ruhe oder Bewegung, und deren Geschwindigkeit oder Richtung) entgegengesetzt (es mag derselbe nun etwas wirkliches, oder, wie die Umdrehung der Himmelskugel, ein bloßer Schein seyn), wird die Trägheit, inertia, des Körpers (unrichtig Trägheitskraft, vis inertiae) genannt. Ist also ein Körper durch eine gewisse Kraft in einen gewissen Zustand gebracht worden: so setzt er, wenn ihn nichts hindert, diesen Zustand, vermöge seiner Trägheit, bloß für sich fort, ohne daß eine neue Kraft, ihn darinnen zu erhalten, nöthig sey.

§. 314. Eine Kraft heißt beständig, die einen Körper gleichförmig beschleunigt oder verzögert; veränderlich aber, die dies nicht gleichförmig thut. Eine absolute Kraft wirkt in den Körper immer gleich stark, er mag ruhen oder sich bewegen; eine

relative Kraft wirkt auf den Körper, je nachdem er ruhet, oder sich langsamer oder geschwinder bewegt, verschiedentlich. Z. E. ein Strom vermehrt, aber ungleich, die Geschwindigkeit eines schwimmenden Körpers immer fort, bis sie der seinigen gleich wird, und seine weitre Wirkung in den Körper aufhört.

§. 315. Gleichfalls ist in (Stat. §. 10 bis 15.) der Begrif der Schwere oder Schwerkraft bestimmt worden, auf deren nähere Untersuchung dieses ganze Capitel hauptsächlich gerichtet ist.

Es lehrt hiebey aber zugleich die Erfahrung, daß die Schwere, welche den Körper gegen die Erde zu stoßen scheint, in jeden Theil der Materie überall mit einerley Stärke wirkt, d. i. daß sie den Körper in allen Stellen, wo er sich befinden möge, immer gleich stark gegen die Erde stößt. Schon dies könnte ein hinreichender Grund seyn, die Schwere zu den beständigen und absoluten Kräften zu rechnen; aber auch die Erfahrung bestätigt alle Schlüsse, die hieraus gezogen werden, und setzt es also außer allen Zweifel.

§. 316. Lehrsatz. Beym freyen Fall schwerer Körper verhalten sich die Räume S, s, wie die Quadrate der Zeiten T, t. Oder es ist; $S : s = T^2 : t^2$.

Beweis. Ein Körper falle durch den Raum S = A N (Fig. 22.) in der Zeit T, die man sich in kleinste Theilgen (Augenblicke) von unzähliger Menge = n getheilt gedenken kann. Die Theile in A N stellen die Räume für jeden Augenblick vor, wie A B für den ersten, MN für den nten. In jedem dieser Theilpunkte giebt die Schwerkraft dem Körper gleichsam einen neuen Stoß, wodurch er jedesmahl

in

in der Richtung AN eine Geschwindigkeit = a erhält; und man gedenke sich, daß der Körper jeden Theil des Raums AB, BC u. s. w. mit dieser Geschwindigkeit a, die er im Anfange desselben erhalten hat, beschreibe, welches aber nur verstattet werden kann, wenn die Zahl der Augenblicke $n = \infty$ ist. Denn da die Schwere ohne allen Zweifel unablässig in den Körper wirkt: so kann man keinen Theil der Zeit bestimmen, so klein er auch sey, da die Schwere nur im Anfange desselben wirkte, und während desselben nicht; daher nothwendig, wenn man dies annehmen will, jedes Zeittheilgen unendlich klein, also derselben Menge n unendlich groß seyn muß. Dieses also vorausgesetzt, giebt der erste Stoß der Schwere dem Körper eine Geschwindigkeit, womit er im ersten Augenblicke durch AB = a fällt. Vermöge seiner Trägheit würde er im zweyten Augenblicke durch eine Tiefe = a fallen, aber er erhält in B von der Schwere einen zweyten Stoß von eben der Stärke, wodurch also der Raum BC = 2 a wird. Auf eben die Art kömmt in C wieder ein a hinzu, daß also CD = 3 a wird u. s. w.; folglich MN = n. a.

Demnach ist in n Augenblicken der gesammte Fall des Körpers $S = AN = AB + BC \ldots + MN = a + 2a + 3a \ldots + na = a(1 + 2 + 3 \ldots + n) = a \frac{(n+1)n}{2}$ §. 126. Auf eben die Art ist für die Zeit t, die aus m solchen Augenblicken besteht, die Höhe des Fallens $s = a \frac{(m+1)m}{2}$. Folglich $S : s = (n+1)n : (m+1)m$. Da aber n so wohl, als m, $= \infty$ ist: so ist 1 gegen n und m nicht zu achten, daß also $S : s = (n)n : (m)m = n^2 : m^2 = T^2 : t^2$.

Anmerkung. Dieser Beweis ist Herrn K. C. Langsdorf (Mechanische und Hydrodynamische Untersuchungen, Altenburg 1782.) vom Herrn Hofrath Kästner mitgetheilt worden, so wie der im nächstfolgenden Zusatze.

§. 316. Bewegte sich ein Körper gleichförmig mit der Geschwindigkeit, welche er während des Falles durch AN erhalten hat: so würde er in derselben Zeit den doppelten Raum durchlaufen.

Denn in A war seine Geschwindigkeit $= a$, in $B = 2a$ u. s. w. in $M = na$. Bewegte er sich nun gleichförmig mit dieser letzten Geschwindigkeit: so würde er in einem Augenblicke den Raum na, folglich in der Zeit durch AN, d. i. in n Augenblicken, den Raum $n.\, na = n^2 a$ beschreiben. Dieser sey $= K$. Nun war in dieser Zeit $S = \frac{n(n+1)}{2} a$.

Folglich ist $K : S = n^2 : \frac{n^2+n}{2} = 1 : \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1$, weil n sehr groß, folglich $\frac{1}{n}$ nicht zu achten ist.

§. 318. Hat man durch die Erfahrung bestimmt, wie tief ein Körper in einer gegebenen Zeit fällt, z. E. wieviel rheinländische Fuß S in einer gewissen Menge von Secunden T: so findet man den Raum für die erste Secunde, wenn man setzt $T^2 : 1 = S : \frac{S}{T^2}$. Diesen Raum hat man durch Versuche $= 15{,}625$ Rheinländische Fuß gefunden. Setzt man diesen Raum $= g$: so ist

I. $g = 15{,}625'$ Rheinländ. Hieraus findet man den Raum s für t Secunden, wenn man setzt $1 : t^2 = g : s$. Folglich ist

II.

II. $s = g.t^2$, folglich $t = \sqrt{\frac{s}{g}}$, auch den Raum für die gleichförmige Bewegung nach §. 317. $2 s = 2 g t^2$.

§. 319. Die Geschwindigkeit, die der Körper am Ende der ersten Secunde erhalten hat, sey k. Nun ist der Zusatz an Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleich. Folglich ist am Ende der Zeit t die erhaltene Geschwindigkeit $c = k t$. Bewegte sich der Körper mit dieser Geschwindigkeit nun gleichförmig in der Zeit t: so würde er einen Raum $= k t. t = k t^2$ zurücklegen. Dieser aber ist $= 2 g t^2$ §. 319. Folglich ist $k t^2 = 2 g t^2$, oder

I. $k = 2 g = 31,25'$ Rheinl. Nun war $c = k t$. Folglich ist

II. $c = 2 g t$, und $t = \frac{c}{2g}$. Aber $s = g t^2$, §. 318. Folglich $s = \frac{g c^2}{4 g g} = \frac{c^2}{4g}$. Auch ist $t = \sqrt{\frac{s}{g}}$ §. 318. Folglich $c = \frac{2 g \sqrt{s}}{\sqrt{g}} = 2 \sqrt{gs}$. Demnach ist

III. $s = \frac{c^2}{4g}$ und

IV. $c = 2 \sqrt{gs}$. Folglich auch $C = 2 \sqrt{g S}$, folglich

V. $C : c = \sqrt{S} : \sqrt{s}$; oder in dem Sinne §. 294.

VI. $C = \sqrt{S}$; da dann S die einer gegebenen Geschwindigkeit C zugehörige Höhe heißt.

§. 320. Lehrsatz. Ein Körper, der mit einer gewissen Geschwindigkeit h anfängt, vertical in die Höhe zu steigen, erreicht diejenige Höhe, von welcher er herabfallen müßte, um dieselbe Geschwindigkeit h zu erhalten.

Beweis. Die Schwere wirkt seiner Richtung entgegen, und vermindert seine Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleich viel, so daß er (mit gleichförmig verminderter Bewegung) so lange steigt, bis die anfängliche Geschwindigkeit h völlig aufgegangen ist. Es wird diese aber in der Zeit t um so viel vermindert, als die Schwere in solcher Zeit einem fallenden Körper an Geschwindigkeit ertheilt haben würde, nämlich um 2 g t. Folglich ist nach Verlauf der Zeit t, die noch übrige Geschwindigkeit des steigenden Körpers $h - 2gt$, also wenn er die größte Höhe erreicht hat, d. i. wenn h völlig aufgegangen ist, $h - 2gt = 0$, folglich $t = \frac{h}{2g}$. In dieser Zeit würde der Körper, wenn er sich mit der anfänglichen Geschwindigkeit h, gleichförmig fortbewegte, eine Höhe $= h . \frac{h}{2g}$ erreicht haben, durch die Schwere aber von einer Höhe $= g \frac{h^2}{4g^2} = \frac{h^2}{4g}$ herabgestoßen seyn, welche also von jener abgehet. Demnach ist die größte Höhe, die der steigende Körper erreicht $= \frac{hh}{2g} - \frac{h^2}{4g} = \frac{2h^2 - h^2}{4g} = \frac{h^2}{4g}$, welches dann die Höhe ist, von welcher er herabfallen müßte, um die Geschwindigkeit h zu erhalten. §. 319. III.

§. 321. Bewegt sich ein schwerer Körper auf einer schiefen Fläche AB (Fig. 25.) so ist seine absolute Schwere P zur relativen p, wie AB : AC. (Stat. §. 132.) Folglich $p = \frac{AC}{AB} P$. Da nun dieses für alle Punkte der AB gilt: so ist p eine beständige gleichförmig beschleunigende Kraft, so wie

es

es P war; und es lassen sich alle Gesetze der verticalen Bewegung, sowohl für das Fallen, als für das Steigen, auch auf die schiefe anwenden, wenn man nur in obigen Formeln $\frac{AC}{AB}.g$, und $\frac{AC}{AB}.k$, anstatt g und k setzet.

§. 322. In einer Zeit t sey der verticale Weg $S = gt^2$: so ist in derselben Zeit der schiefe Weg $s = \frac{AC}{AP}.gt^2$, folglich $S : s = 1 : \frac{AC}{AB} = AB : AC$, folglich für den Punkt M, $= AM : AN$, oder (wenn MF auf AB senkrecht, und daher $\triangle AMF \sim \triangle ACB$) $= AF : AM$, d. i. der Körper bewegt sich durch die schiefe AM in der Zeit, in welcher er durch die verticale AF fallen würde; folglich (Fig. 26.) durch alle Sehnen des Kreises AC, AD, AE u. s. w. denen der verticale Durchmesser AB gemein ist, in gleicher Zeit, daß also solche Sehnen gleichzeitige Wege, spatia isochrona, vorstellen rc.

§. 323. Hängt ein schwerer Körper P (Fig. 27.) mittelst eines Fadens oder einer Stange CP von dem unverrückten Punkte C herab: so wird er, wenn man ihn aus der verticalen Lage gebracht hat, den Kreisbogen AB beschreiben, und diese Bewegung, wenn nicht äußere Hindernisse entgegen sind, ohne Aufhören hin und her fortsetzen. Dies heißt eine Schwungbewegung, motus oscillatorius; ein Hingang durch AB und Rückgang durch BA zusammen einen Schwung, oscillatio, der Faden nebst dem Körper ein Pendel, pendulum, und die Abweichung des Fadens von der Verticallinie, PCA, der Elongationswinkel.

Denn wenn man das Pendel in die Lage CA gebracht hat: so fällt der Körper von A nach P, wie auf einer schie-

schiefen Fläche. Es wirkt nämlich die Schwere in jedem Punkte des Bogens, wie A, nach der Richtung AD, die mit CP parallel ist, und in zwey Kräfte AE in der Richtung des Fadens, und AG in der Richtung der Tangente, zerlegt werden kann. Erstere wird vom Faden aufgehoben, mit letzterer, welche als die relative Schwere auf der schiefen Fläche anzusehen ist, bewegt er sich in dem Elemente des Bogens AG, und so nach und nach durch alle Elemente, folglich durch den ganzen Bogen AP. In P hat er eine Geschwindigkeit erreicht, welche der Höhe MP zugehört, und mit welcher er durch PB = AP in eben der Zeit steigt §. 320. Nun treibt ihn die Schwere durch BP, und er steigt alsdann wieder durch PA u. s. w.

§. 324. Man betrachtet aber hier den aufgehangenen Körper P bloß als einen schweren Punkt, und den Faden oder die Stange CP als eine Linie ohne Schwere. Dies heißt ein einfaches Pendel, dessen Länge die Entfernung des schweren Punkts vom Aufhängepunkte, oder die Länge des Fadens CP ist. Ein zusammengesetztes Pendel ist das System aller schweren Punkte, welche den Körper P und die Stange CP zusammen ausmachen. Macht ein einfaches Pendel seine Schwingungen mit dem zusammengesetzten in einerley Zeit: so heißt es ein damit gleichzeitiges; da dann der schwere Punkt P der Schwingungspunkt, und der Faden CP die Länge des zusammengesetzten Pendels heißt. Ein Secundenpendel ist, das seine Schwingung in einer Secunde macht, dessen Länge 3 Fuß und $8\frac{1}{2}$ Linie zu Paris beträgt.

§. 325. Die Schwingungszeiten T, t zweyer Pendel von verschiedener Länge CP, cp, verhalten sich

sich bey gleicher Schwerkraft und ähnlichen Schwingungen, wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen.

Denn hier verhalten sich die durchlaufenen Räume AP, ap, oder die Fallhöhen, MP, mp, wie CP : cp. Nun ist $T^2 : t^2 = S : s$ §. 316. Folglich ist $T^2 : t^2 = CP : cp$, folglich $T : t = \sqrt{CP} : \sqrt{cp}$.

Anmerkung. Je kürzer demnach das Pendel ist: desto kürzer ist auch die Schwingungszeit. Jedoch hängt diese auch noch von der Größe des Elongationswinkels, und der Kraft der Schwere ab. Denn je kleiner der Elongationswinkel ist: desto kleiner ist der Raum, den der Körper durchlaufen muß; desto kürzer ist auch die Zeit der Schwingung. Je größer hingegen die Kraft der Schwere ist: desto mehr beschleunigt sie das Pendel; desto kürzer ist folglich die Schwingungszeit. Wäre daher die Kraft der Schwere nicht allen Orten unsrer Erde gleich: so würde bey gleicher Länge des Pendels, und bey gleichem Elongationswinkel eine größere oder geringere Kraft eine kürzere oder längere Schwingungszeit machen.

§. 326. Lehrsatz. Die Bahn eines geworfenen Körpers, wenn man den Widerstand der Luft bey Seite setzt, ist eine parabolische Linie.

Beweis. 1.) Für den horizontalen Wurf AB (Fig. 28.) würde der Körper mit der Geschwindigkeit c in der Zeit t den Raum $AD = PM = ct$ beschrieben, aber die Schwere in eben der Zeit ihn durch $DM = AP = gt^2$ herabgezogen haben; so daß er sich am Ende dieser Zeit in einem Punkte M befinden muß, für welchen $PM^2 = c^2 t^2$, und $AP = gt^2$, oder $\frac{AP}{g} = t^2$, folglich $PM^2 = \frac{c^2}{g}$. AP

ist

ist; eine Gleichung für die Parabel $y^2 = \frac{c^2}{g} x$ §. 244. Ist HR der Horizont als Boden, über welchem der Wurf in der Höhe HA = d geschiehet: so setze man in obiger Gleichung d anstatt x, um die Weite des Wurfs zu finden.

2.) Für den schiefen Wurf AB (Fig. 29.) wo AR der horizontale Boden, womit AB den Winkel α macht, beschreibt der Körper mit der Geschwindigkeit k in der Zeit t den Raum AD = kt, der sich in den horizontalen AQ = kt. cos. α, und den verticalen DQ = kt. sin. α zerlegen läßt. Jenen läßt die Schwere ungeändert, diesen vermindert sie um $DM = gt^2$, so daß der Körper am Ende der Zeit t in einem Punkte M seyn muß, für welchen AQ = kt. cos. α, und QM = DQ — DM = k t. sin. $\alpha - gt^2$ ist.

Für die Weite des Wurfs AR ist dieses QM = O; folglich kt. sin. $\alpha = gt^2$ oder k. sin. $\alpha = gt$, folglich $t = \frac{k. \sin. \alpha}{g}$. Diesen Werth anstatt t in die Gleichung für AQ gesetzt, giebt $AR = \frac{k^2. \cos\alpha. \sin.\alpha.}{g}$ $= \frac{k^2. \sin. 2\,\alpha}{g}$.

Anmerkung. Ist unsre Erde eine Kugel: so treibt die Schwere den geworfenen Körper in jedem Punkte seiner Bahn nach der Erde Mittelpunkte, um den er also eine Linie beschreiben müßte. Aber wegen der kleinen Distanz AR ist es erlaubt, die verticalen Linien als parallel anzusehen (Stat. §. 14.)

§. 327. Ein Körper (Fig. 30) habe sich in dem kleinsten Zeittheilgen durch AB bewegt, und würde

würde mit seiner Trägheit in dem nächsten Zeittheilgen durch Bb = AB fortgehen; aber eine nach BC gerichtete Kraft sey so stark, daß sie ihn für sich in diesem Zeittheilchen durch Bc führen würde: so muß der Körper des Parallelograms Diagonale BD in eben der Zeit durchlaufen, und würde in dem nächsten Zeittheilgen vermöge seiner Trägheit durch Dd = BD fortgehen, wenn ihn obgedachte Kraft nicht nach De zöge, und daher verursachte, daß er die Diagonale DE durchlaufen muß. Hiedurch wird also der wahre Weg des Körpers, den man als einen schweren Punkt betrachtet, der Theil eines Polygons ABDE, der sich in eine krumme Linie verwandelt, wenn die Kraft nach C ununterbrochen wirkt, und man die Zeittheilgen, folglich auch die Räume AB, BD, DE, unendlich klein annimmt.

Eine solche krummlinichte Bewegung um einen gewissen Punkt C, den Mittelpunkt der Kräfte, heißt eine Centralbewegung, und die Kraft, die den Körper stets nach diesem Punkte ziehet, eine Centripetalkraft. Sind die Wege der Trägheit Bb, Dd, Tangenten der krummen Linie (Tangentialbewegung) in den Punkten B, D, folglich CB, CD, auf sie senkrecht, oder normal: so heißt die Centripetalkraft auch Normalkraft. Die Tangentialbewegung verursacht allemahl auch eine Entfernung des bewegten Körpers von C; welche der Schwung des Körpers (auch wohl Schwungkraft, Centrifugalkraft) heißt, und welcher die Centripetalkraft entgegenwirkt.

Ziehet man Cb, Cd: so ist △ ACB = △ BCb, weil AB = Bb. Nun ist auch △ BCb = BCD, weil bD der gemeinschaftlichen Seite BC parallel ist. Folglich ist auch △ ACB = △ BCD, und aus

gleichem Grunde, $= \triangle$ DCE. Verwandelt sich das Polygon in eine krumme Linie, und nennt man CA, CB, CD, CE u. s. w. den Radius vector: so beschreibt derselbe in unendlich kleinen Zeittheilgen, folglich überhaupt in gleichen Zeiten, gleiche Flächenräume.

XI.

Optik.

§. 328.

Für den Strahlencylinder (Opt. §. 8. Fig. 38)

Im rechtwinklichten $\triangle$ ACB sey der Winkel bey A = 1 Minute, so ist sin. tot: sin. 1′ = AB:BC, folglich BC $= \frac{\text{sin. } 1'}{\text{sin. tot.}}$ AB, wo log. $\frac{\text{sin. tot.}}{\text{sin. } 1'} =$ 3, 5362738 der Zahl 3437 zugehörig, folglich BC $= \frac{1}{3437}$ AB ist. Wäre also BC $= \frac{1}{3500}$ AB: so wäre A < 1 Minute, folglich AB mit AC schon ohne sehr merklichen Fehler, parallel zu setzen. Auf eben die Art findet man für A = 1 Sec., BC $= \frac{1}{206260}$ AB. Ferner ist, wenn AB sehr groß gegen BC ist, AC von AB nicht sehr unterschieden, daß also B = C = R $- \frac{1}{2}$ A.

§. 329. Für die Berührungslinie (Opt. §. 22. Fig. 40.)

1) Es

1) Es sey AB = a, AC = r, BD = ϱ, gegeben: so ist im rechtwinklichten $\triangle$ AEB, AB : AE = 1 : sin. ABE, wo AE = r — ϱ; folglich sin. ABE = $\frac{r - \varrho}{a}$; welches die Lage von BE, folglich auch von GH giebt. Auch ist CAG = R — ABE, und DBH = R + ABE.

2) AE : AB = AG : AK, d. i. r — ϱ : a = r : AK, folglich AK = $\frac{r\,a}{r - \varrho}$, folglich BK = AK — AB = $\frac{r\,a}{r - \varrho}$ — a = $\frac{\varrho\,a}{r - \varrho}$.

3) Im rechtwinklichten $\triangle$ AFB ist AB : AF = 1 : sin. ABF, wo AF = r + ϱ, folglich sin ABF = $\frac{r + \varrho}{a}$; welches die Lage von BF, folglich auch von MN giebt. Auch ist DBM = CAN = R — AON = R — ABF.

4) AN : BM = AO : BO, folglich AN + BM : BM = AO + BO : BO, d. i. r + ϱ : ϱ = a : BO, folglich BO = $\frac{\varrho\,a}{r + \varrho}$, folglich AO = AB — BO = a — $\frac{\varrho\,a}{r + \varrho}$ = $\frac{r\,a}{r + \varrho}$.

§. 330. Für den geraden Schatten (Opt. §. 35. Fig. 42)

Im rechtwinklichten $\triangle$ BAC ist tang. ABC : r = AC : AB, und im $\triangle$ DAC, tang. ADC : r = AC : AD. Wüßte man nun der Sonne scheinbaren Durchmesser vCt = DCE (32 Min.) so wäre CEA = ADC — vCt, und man fände AE, wie vorher AD.

§. 331. Für die scheinbare Größe (Opt. §. 47. 48. Fig. 39. 40)

I. Fig. 39. ist tang. GAF $= \frac{GF}{AG}$, und Fig. 42. tang. AEC $= \frac{AC}{AE}$, folglich tang. GAF : tang. AEC $= \frac{GF}{AG} : \frac{AC}{AE} =$ GF . AE : AC . AG oder = AE : AG, wenn GF = AC, oder = GF : AC, wenn AE = AG.

II. Fig. 40. Ist das Auge in O: so ist sin. AON $= \frac{AN}{AO}$. Ist das Auge in K: so ist sin. AKG $= \frac{AG}{AK}$. Folglich ist sin. AON : sin. AKG $= \frac{AN}{AO} : \frac{AG}{AK} = \frac{1}{AO} : \frac{1}{AK} =$ AK : AO. Wäre OA in A senkrecht: so hätte man tang AON: tang. AKG = AK : AC.

§. 332. Für (Perspectiv §. 13. 14. Fig. 43.) Es sey OS = a; OR = d; BG = δ; TG = n; AB = α; Hb = z; TH = b; ba = x; GH = y.

1) Die Ebene BOS ist auf der Grundfläche senkrecht, folglich auch ihr Durchschnitt mit der Tafel Hb, der daher mit OS parallel; so wie auch BG mit ST. Folglich ist BH : BS = Hb : OS, und BH : HS = BG : ST, also BH : BS = BG : BG + ST. Folglich ist BG + ST : BG = OS : Hb, d. i. $\delta + d : \delta = a : x$, folglich

$$\text{I. } x = \frac{ad}{\delta + d}$$

2) Da n durch die Lage von O und M gegeben, und BG : TS = HG : HT; so ist BG + TS : TS

TS = TG : HT, d. i. $\delta + d : d = n : b$, folglich

II. $b = \frac{nd}{\delta + d}$.

3) Da BG : ST = BH : HS, so ist BG + ST : ST = BS : HS. Nun ist BS : HS = BO : bO = AB : ba. Folglich ist BG + ST : ST = AB : ba, d. i. $\delta + d : d = \alpha : z$, folglich

III. $z = \frac{\alpha d}{\delta + d}$.

4) Da $GH = TG - TH = n - b = n - \frac{nd}{\delta + d}$, so ist

IV. $y = \frac{n\delta}{\delta + d}$.

5) Da $\frac{n\delta}{\delta + d} : \frac{a\delta}{\delta + d} = n : a$, d. i. GH : Hb = GT : TR, so sind G, b, R, in gerader Linie.

6) Da $\frac{n\delta}{\delta + d} : \frac{nd}{\delta + d} = \delta : d$, d. i. GH : TH = $\delta : d$; aber Gb : bR = GH : TH, so ist Gb : bR = $\delta : d$, folglich auch Gb : GR = $\delta : \delta + d$, folglich $Gb = \frac{\delta}{\delta + d} \cdot GR$, wo $GR = \surd(TR^2 + TG^2) = \surd(a^2 + n^2)$.

Anmerkung. Für die Anwendung dieser Formeln befindet sich ein lehrreiches Exempel in des Herrn Hofr. Kästners Anfangsgründen Persp. §. 22.

§. 333. Für die hohlen Kugelspiegel (Catoptr. §. 40. Fig. 50.)

1) Man setze den Halbmesser des Spiegels CM = f, die Entfernung des leuchtenden Punktes, AE = a, und seines Bildes AG = α; auch sey ACM sehr klein, daß man die hiebey vorkommenden Winkel anstatt ih-

Sinus setzen könne: so ist nach §. 194. CM : EC $=$ E : CME, und CG : CM $=$ CMG : G, folglich, (da CME $=$ CMG. Catopt. §. 13) CG : EC $=$ E : G (Arithm. §. 175.) folglich auch EC — CG : EC $=$ G — E : G $=$ 2. CMG : G $=$ 2. CG : CM. Demnach ist (EC — CG) CM $=$ 2. CG. EC, (wo CM $=$ f, CG $= f - \alpha$, EC $= a + f$, CG $= f - \alpha$, und daher EC — G $= a - 2f + \alpha$) folglich $af - 2f^2 + \alpha f = 2af - 2f^2 - 2a\alpha + 2\alpha f$, d. i. $0 = af - 2a\alpha + \alpha f$, oder $(2a - f)\alpha = af$. Folglich ist

$$\text{I. } \alpha = \frac{af}{2a - f}.$$

2) Ist der einfallende Strahl EM der Axe parallel, wenn nämlich E unendlich entfernt d. i. $a = \infty$ ist; so ist in (I) f gegen 2 a nicht zu rechnen, daher $\alpha = \frac{af}{2a} = \frac{f}{2}$ wird. Alsdann heißt G der Brennpunkt des Spiegels, und seine Brennweite AG $=$ p. Demnach ist

$$\text{II. } p = \frac{f}{2}.$$

3) Aus (I) hat man $\frac{1}{\alpha} = \frac{2a - f}{af} = \frac{2}{f} - \frac{1}{a}$ folglich

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a}$ oder $\frac{a + \alpha}{a\alpha} = \frac{2}{f} = \frac{1}{p}$. Folglich ist

$$\text{III. } p = \frac{a\alpha}{a + \alpha}.$$

4) Aus (III) hat man $ap + \alpha p = a\alpha$, folglich $ap = (a - p)\alpha$, oder $\alpha = \frac{ap}{a - p}$; und $\alpha p = (\alpha - p)a$, oder $a = \frac{\alpha p}{\alpha - p}$. Demnach ist

IV. $\alpha = \frac{ap}{\alpha - p}$.

V. $a = \frac{\alpha p}{\alpha - p}$.

5) Schneidet der einfallende Strahl die Axe hinter dem Spiegel, daß AE = a negativ wird: so ist aus (I) $\alpha = \frac{-af}{-(2a+f)}$, und aus (IV) $\alpha = \frac{-ap}{-(a+p)}$, folglich

VI. $\alpha = \frac{af}{2a+f} = \frac{ap}{a+p}$.

6) Für die Bilder des hohlen Kugelspiegels, für welchen p stets positiv ist, folglich aus (IV) $\alpha = \frac{ap}{a-p} = \frac{a}{a-p} \cdot p$, positiv seyn kann, giebt es 3 Fälle:

a) so lange $a > p$ ist, zeigt sich ein physisches Bild, welches entweder dem Spiegel näher als das Object ist, so lange $a > 2p$; oder mit dem Objecte zusammenfällt, wenn $a = 2p$; oder vom Spiegel weiter als das Object ist, wenn $a < 2p$.

b) ist $a = p$, so ist $\alpha = \frac{ap}{0} = \infty$, d. i. die Strahlen werden parallel zurückgeworfen.

c) ist $a < p$, so wird $\alpha = \frac{a}{-(p-a)} p$, also negativ, d. i. es entsteht ein geometrisches Bild.

§. 334. Für die erhobenen Kugelspiegel (Catoptr. §. 50. Fig. 52.) Hier bekömmt AC = f eine entgegengesetzte Lage, oder wird negativ, daher ist (§. 333, II.) $p = -\frac{f}{2}$, also die Brennweite

stets negativ; folglich aus (§. 333, IV.) $\alpha = \frac{-ap}{a+p} = -\frac{a}{a+p}\cdot p$, d. i. das Bild ist geometrisch.

§. 335. Für (Dioptr. §. 17. Fig. 55.) Bey der angenommenen Brechungsverhältniß ist 3 : 2 = sin. EAC : sin. GAC, folglich für den ersten Fall sin. GAC = $\frac{2}{3}$ sin. EAC, und für den zweyten sin. EAC = $\frac{3}{2}$ sin. GAC, folglich log. sin. GAC = log. sin. EAC — $\frac{3}{2}$, und log. sin. EAC = log. sin. GAC + log. $\frac{3}{2}$. Bey kleinen Winkeln nimmt man diese anstatt ihrer Sinus. Gemeiniglich erstreckt man dies bis 30 Grad, wo der Fehler aber schon über $\frac{1}{2}$ Grad beträgt; indem $\frac{2}{3}$ sin. 30° = sin. 19° 28′ ist. §. 191. Anm. 3.

Anmerkung. Ist GAC = 41° 49′, so gäbe die Rechnung $\frac{3}{2}$ sin. 41° 49′ > sin. tot. Dieß zeigt an, daß Strahlen, die so schief auffallen, nicht aus dem Glase in die Luft gehen, sondern zurückgeworfen werden; wie auch die Erfahrung lehret.

§. 336. Für (Dioptr. §. 24. hier Fig. 20.)

1) Von der Linse PP, deren Axe EHO, sey der Halbmesser der Vorderfläche, CM = f, der Hinterfläche, DN = g. Der einfallende Strahl EM, werde in der Vorderfläche nach MNO; in der Hinterfläche nach NF gebrochen. (Dioptr. §. 17) und es sey AEM = ϕ, EA = a, HB = $\frac{1}{2}$ AB = v, HO = k, also BO = k — v, BF = α, endlich die Brechungsverhältniß aus Luft in Glas n : 1, und die Winkel hiebey so klein, daß man sie anstatt ihrer Sinus setzen könne.

2) Man verlängere CM nach c, da dann EMc der Einfallswinkel, CMO der Brechungswinkel, die

sich

sich wie n : 1 verhalten. Nun ist im $\triangle$EMC, CM : EC = AEM : EMc, d. i. f : a + f = ϕ : EMc. Folglich ist $EMc = \frac{a+f}{f}\phi$, und $n : 1 = \frac{a+f}{f}\phi$: CMO, folglich $CMO = \frac{a+f}{nf}\cdot\phi$. Folglich ist ECM = $EMc - E = \frac{a+f}{f}\cdot\phi - \phi = \frac{a}{f}\phi$, folgl. COM $= ECM - CMO = \frac{a}{f}\phi - \frac{a+f}{nf}\phi = \frac{(n-1)a-f}{nf}\phi$. Nun ist auch COM : CMO = CM : CO. Folgl. ist CO = $\frac{f(a+f)\phi}{nf}\cdot\frac{nf}{(n-1)a-f.\phi} = \frac{f(a+f)}{(n-1)a-f}$, folglich

$$\text{I. } AO = CO + AO = \frac{f(a+f)}{(n-1)a-f} + f = \frac{naf}{(n-1)a-f}$$

3) Dieser Ausdruck ist für alle mögliche Fälle, wenn man ihnen denselben gehörig anpaßt. Nämlich schneidet der einfallende Strahl die Axe hinter dem Glase: so setze man a negativ, da dann

$$\text{II. } AO = \frac{naf}{(n-1)a+f}.$$

Ist die brechende Fläche hohl: so setze man f negativ; da dann

$$\text{III. } AO = -\frac{naf}{(n-1)a+f},$$

d. i. O vor dem Glase. Fallen die Strahlen convergent auf eine hohle Fläche, und gehen aus Glas in Luft: so ist a so wohl als f negativ, und statt n kömmt $\frac{1}{n}$; da dann

$$\text{IV. } AO = \frac{af}{(n-1)a+nf}$$

 4) Der

4) Der zum erstenmahl gebrochene Strahl MNO, gehet in N aus dem Glase in die concave Luft, auf die er convergent fällt. Demnach gilt hier IV, nur daß hier g anstatt f, k — v anstatt a, und BF = α anstatt AO kömmt. Demnach ist

$$\text{V. } \alpha = \frac{(k-v)g}{(n-1)(k-v)+ng}.$$

5) Ist v gegen k sehr klein: so kann man v = o, und k = AO setzen; da dann $\alpha = \frac{kg}{(n-1)k+ng}$, und nach (I) $k = \frac{naf}{(n-1)a-f}$, folglich

$$\text{VI. } \alpha = \frac{afg}{(n-1)(f+g)a-fg} = \frac{fg}{(n-1)(f+g)-\frac{fg}{a}}$$

6) Wenn a unendlich wächst, oder der einfallende Strahl der Axe parallel wird, so verschwindet $\frac{fg}{a}$ im zweyten Ausdruck von α (VI). Alsdann heißt F der Brennpunkt des Glases, und BF seine Brennweite = p. Demnach ist

VII. $p = \frac{fg}{(n-1)(f+g)}$, oder, wenn man die Brechungsverhältniß n : 1 = 3 : 2, folglich n = $\frac{3}{2}$ setzt, $p = \frac{2fg}{f+g}$.

7) Aus VII. folgt p (n — 1) (f + g) = fg. Setzt man diesen Werth von fg in VI, so erhält man

VIII. $\alpha = \frac{ap}{a-p}$, für jede Brechungsverhältniß.

8) Aus VIII. erhält man $a\alpha - \alpha p = ap$, oder $a\alpha = (a + \alpha)\, p$, folglich

IX.

IX. $p = \frac{a\alpha}{a+\alpha}$. Auf eben die Art erhält man

X. $a = \frac{\alpha p}{\alpha - p}$.

9) Für die Kugel, deren Halbmesser $= r$, darf man v in (V) nicht wegwerfen. Denn es ist hier $v = r = f = g$, folglich in (V) $\alpha = \frac{(k-r)r}{(n-1)(k-r)+nr}$ und in (I) $AO = k + r = \frac{nar}{(n-1)a-r}$, oder für $a = \infty$, $k + r = \frac{nr}{n-1}$, folglich $k = r = \frac{nr}{n-1} - 2r = \frac{(2-n)r}{n-1}$. Setzt man diesen Werth anstatt $k - r$ in obige Gleichung für α: so erhält man

XI. $p = \frac{2-n}{2(n-1)} . r$, und, wenn $n = \frac{3}{2}$, $p = \frac{1}{2} r$.

§. 337. Für (Dioptr. §. 26. 27.) Ein Glas mit positiver Brennweite, oder physischem Brennpunkte, welches ein physisches Bild macht, heißt ein Sammlungsglas, dergleichen die ganze und halbe Linse, wie auch der Meniscus ist. Ein Glas mit negativer Brennweite, oder geometrischem Brennpunkte, welches ein geometrisches Bild macht, heißt ein Zerstreuungsglas, dergleichen das doppelte und einfache Hohlglas, wie auch das concav-convexe Glas ist. Denn in der Formel VII. §. 336. $p = \frac{fg}{(n-1)(f+g)}$ sind

1) Für die ganze Linse beyde Halbmesser f, g, positiv, folglich auch p positiv. Für die halbe Linse ist der eine Halbmesser, etwa f als unendlich anzusehen, gegen welchen g für nichts zu achten, daß also

also $p = \frac{fg}{(n-1)f} = \frac{g}{n-1}$ positiv, weil g positiv ist. Für den Meniscus ist der eine Halbmesser f positiv, der andere g negativ und $> f$, folglich $p = \frac{-fg}{-(n-1)(g-f)}$ auch positiv.

2) Für das doppelte Hohlglas, beyde Halbmesser f, g, negativ, folglich $p = \frac{fg}{-(n-1)(f+g)}$ negativ. Für das einfache Hohlglas ist g negativ, und f unendlich, folglich $p = \frac{fg}{(n-1)f} = \frac{-g}{n-1}$ negativ. Für das concav-convexe Glas ist g negativ und $< f$, folglich $p = \frac{-fg}{(n-1)(f-g)}$ negativ.

§. 338. Für (Dioptr. §. 28.) In der Formel VIII. §. 336. $\alpha = \frac{ap}{a-p}$ ist

I. für die Sammlungsgläser p positiv; daher auch α positiv ist, folglich ein physisches Bild entstehet. Es ist aber dieses Bildes Abstand hinter des Glases Brennpunkte, oder $\alpha - p = \frac{ap}{a-p} - p = \frac{p^2}{a-p}$. Daher

1) je weiter der Gegenstand vom Glase ist, desto näher ist das Bild dem Brennpunkte, und fällt in den Brennpunkt, wenn der Gegenstand unendlich entfernt ist. Der Brennpunkt ist also das Bild eines unendlich entfernten Gegenstandes, und das nächste Bild hinter dem Glase. Im Gegentheil, je näher der Gegenstand dem Glase, desto weiter rückt das Bild vom Brennpunkte weg, bis ins unendli-

endliche, wenn $a = p$. Ist $a < p$, so wird α negativ.

2) Für ein flächeres Glas, d. i. dessen Brennweite $P >$ als die Brennweite p des erhobenern ist $\beta - P = \frac{P^2}{a - P} > \alpha - p$, da schon $P > p$ ist. Setzt man also a für beyde einerley, so ist $\beta > \alpha$, wobey β die Entfernung des Bildes vom flächern Glase bedeutet. Setzt man aber die Entfernung des Gegenstandes vom flächern Glase $= A$: so könnte $\beta = \frac{AP}{A - P}$ wohl $= \alpha$ seyn, nur müßte man $A > a$ annehmen.

3) Ohne unendlich zu seyn, kann a doch gegen p so groß seyn, daß $a - p$ unbeträchtlich wird d. i. wenn des Gegenstandes Entfernung sehr vielmahl größer als die Brennweite ist: so fällt das Bild so nahe beym Brennpunkte, daß man es in demselben annehmen darf.

II. Für die Zerstreuungsgläser ist p negativ, folglich $\alpha = \frac{-ap}{a+p} = \frac{-a}{a+p} \cdot p$ negativ, und $\frac{a}{a+p}$ ein ächter Bruch.

§. 339. Für (Dioptr. §. 38 — 41). In den Formeln für α, §. 338. setze man für diesen Fall a negativ; da dann für das Collectivglas $\alpha = \frac{-ap}{-(a+p)} = \frac{a}{a+p}\,p$ ist, und für das Hohlglas $\alpha = \frac{ap}{p-a}$ wird.

§. 340. Für (Dioptr. §. 60.) Ein Auge kann in der Weite a nicht deutlich sehen, wohl aber in

in einer andern α, welches für diese Absicht negativ ist; beyde Weiten sind gegeben, und man sucht die Brennweite p des Augenglases, welches die Strahlen, die das Object in der Weite a dem Auge zusendet, so lenkt, als kämen sie von einem Objecte in der Weite α: so ist (nach der Formel VIII. §. 336.) $-\alpha = \frac{ap}{a-p}$, folglich $-\alpha a + \alpha p = ap$, oder $(\alpha - a)\, p = \alpha a$, folglich $p = \frac{\alpha a}{\alpha - a}$. Für einen Weitsichtigen ist $\alpha > a$, folglich p positiv; für einen Kurzsichtigen ist $\alpha < a$, folglich p negativ.

XII.

Astronomie.

§. 341.

Für (Astr. §. 43. Fig. 72.) In dem schiefen sphärischen Triangel SPZ findet man

1) aus den 3 Seiten die Winkel P und Z, nach §. 231, 11.

2) aus PZ, PS, und P findet man
   - a) SZ nach §. 231, 9.
   - b) Z nach §. 231, 10.

3) aus PZ, PS und Z findet man
   - a) SZ nach §. 231, 3.
   - b) P nach §. 231, 4.

4) aus

4) aus SZ, P, Z, findet man PZ nach §. 231, 6. u. s. w.

§. 342. Für (Astr. §. 67. 87. 88. Fig. 73.) ist

1) r: sin. V = sin. VF : sin. FG. §. 220, I.

2) r: cos. V = tang. VF: tang. VG. §. 220, IV.

3) sin. V: sin. FG = r: sin. VF. §. 220, I.

4) r: cot. V = tang. FG: sin. VG. §. 220, II.

§. 343. Für (Astr. §. 100. Fig. 72.) hat man

1) sin. O : r = sin. FG : sin. OF, §. 220, I.

2) r: cot. O = tang. FG : sin. OG. §. 220, II.

§. 344. Für (Astr. §. 102. Fig. 72.) Soll man aus der Polhöhe PR und eines Sterns F Abweichung FG, seinen halben Tagebogen AG=APG finden; also in dem schiefen △ ZPF den genannten Winkel aus PZ, PF, und ZF = 90 Gr. so gilt hier §. 227, daß man aus F den Perpendikel FR fällt, und im rechtwinklichten △ PRF aus PR und PF den Winkel RPF berechnet; da dann r: cot. PF = tang. PR: cos. RPF §. 220. IV.

§. 345. Für (Astr. §. 110. Fig. 73.) z. E. die Weite der Sterne FM findet man aus PF, PM und dem eingeschlossenen Winkel P nach §. 231, 9.

§. 346. Für (Astr. §. 116 bis 118. Fig. 73.) Aus PK, PM, und dem Winkel P findet man KM nach §. 231, 9; und den Winkel PKM, oder PMK nach §. 231, 10. Umgekehrt findet man auf eben die Art PM und P, aus PK, KM, und K.

§. 347. Für (Astr. §. 163. Fig. 71.) Im parallactischen △ CLA ist CA : CL = sin. CLA: sin.

sin. LAZ §. 194; von welchen 4 Dingen sich also jedes aus den 3 übrigen finden läßt. Auch erhellet, da CA : CL unverändert bleibt, daß CLA mit LAZ wachsen, folglich die Horizontalparallaxe die größte seyn müsse, wo CQ : CA = sin. tot : sin. CQA. 1) Vergleicht man diese Proportion mit der obigen: so ist für einerley Himmelskörper CQ = CL, folglich sin. tot: sin. CQA = sin. LAZ: sin. CLA, daß man also aus der Horizontalparallaxe die Höhenparallaxe, und jene aus dieser findet. 2) Für zwey ungleich entfernte Himmelskörper Q, G, hat man CQ : CA = sin. tot: sin. CQA, und CA: CG = sin. CGA: sin. tot., folglich CQ : CG = sin. CGA: sin. CQA = CGA : CQA, weil diese Winkel sehr klein sind.

§. 348. Für (Astr. §. 167. Fig. 71) Setzt man CA = 1, CQ = d, CQA = p: so ist sin. p = $\frac{1}{d}$, oder d = $\frac{1}{\text{sin. p}}$ §. 347. Wächst also d, so muß p abnehmen. Für die scheinbare Höhe LAh = α sey die zugehörige Parallaxe CLA = π: so ist, weil CL = CQ = d, d : 1 = cos. α: sin. π, §. 347. folglich sin. $\pi = \frac{1}{d}$. cos. α = sin. p. cos. α, oder π = p. cos. α. Wächst α, so muß AL abnehmen. Denn nach §. 207, 1. ist $CL^2 = AL^2 + CA^2 - 2$ AL . CA. cos. CAL, aber CA = 1, und CAL = $90^\circ + \alpha$, und daher cos. CAL = — sin. α. Folglich ist $d^2 = AL^2 + 1 + 2$ AL. sin. α, oder $d^2 - 1 = AL^2 + 2$ AL. sin. α. Da nun $d^2 - 1$ unveränderlich: so muß, wenn α wächst, AL nothwendig abnehmen. Wäre z. E. L der Mond: so kömmt er, je höher er steigt, dem Auge näher, und es wächst also sein scheinbarer Durchmesser, der im

Ho-

Horizonte, fast wie aus dem Mittelpunkte C gesehen, am kleinsten ist, und der horizontale Durchmesser heißt.

Anmerkung. Weicht die Erde von der Kugelgestalt ab: so hat ein Weltkörper in einer gegebenen Lage für verschiedne Oerter auf der Erde nicht einerley Parallaxe. Daher heißt man Aequatorealparallaxe, die er für einen Ort im Erdäquator hat.

§. 349. Für (Astr. §. 165. hier Fig. 31.) Soll man die Parallaxe des Planeten S finden: so nehme man zwey Oerter auf der Erdfläche A, B unter einerley Mittagskreise, auch daß deren Weite AB, folglich der Winkel ACB bekannt, und die Erde eine vollkommene Kugel sey. Tritt S in den Mittagskreis: so messe jeder Ort A, B, den Abstand vom Zenith SAZ, SBz, welches zugleich die Nebenwinkel CAS, CBS, giebt. Aus diesen und dem bekannten Winkel ACB ergiebt sich ASB = ASC + BSC. Nun ist sin. SAz: sin. SBx = sin. ASC: sin. BSC. §. 347. Folglich ist sin. SAZ + sin. SBz: sin. SAZ — sin. SBz = sin. ASC + sin. BSC: sin. ASC — sin. BSC (Ar. §. 169.) = tang $\frac{ASC + BSC}{2}$ tang. $\frac{ASC - BSC}{2}$ §. 212, woraus man die Parallaxen ASC, BSC selbst findet §. 30, und hiedurch die Horizontalparallaxe des Planeten S bestimmt. §. 347.

Anmerkung. Für die Praxis ist diese Methode freylich mit großen Schwierigkeiten verbunden; aber sie soll hier auch nur dienen, die Möglichkeit der Sache zu zeigen.

§. 350. Die mittlere Parallaxe des Mondes ist nach den Berlin. Astron. Tafeln = 57′ 21″. Die Parallaxe der Sonne (für ihre mittlere Entfernung) aus den neuesten Beobachtungen hergeleitet, ist nach Herrn Hell = 8, 7″. Hieraus folgt mittelst der Gleichung $d = \frac{1}{\sin. p}$ §. 348. für den Mond log. d = 10 — log. tab. sin. 57′ 21″ = 1,7777605 folglich die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde = 59,946 Erdhalbmesser; und für die Sonne, da man ihre so kleine Parallaxe statt ihres Sinus setzen kann,

log. 1″ = 0,6855749 — 6
log. 8, 7 = 0,9395192

log. 8, 7″ = 0,6250941 — 5, folglich

log. d = 10 — log. 8, 7″ = 4,3749058, folglich die mittlere Entfernung der Sonne = 23708 Erdhalbmesser.

§. 351. Zum Beschluß der sphärischen Astronomie ist noch des Micrometers zu gedenken, eines Werkzeuges, welches dient, kleine Weiten am Himmel zu messen, wozu der Quadrant nicht fein genug ist; wenn z. E. der Unterschied in der Declination und Rectascension zweyer Fixsterne (Astr. §. 108.) oder der Durchmesser eines Himmelskörpers kleiner als des Fernrohrs Gesichtsfeld ist. Da aber der Grund eines jeden Micrometers, so verschieden auch seine Einrichtung seyn mag, darauf beruhet, daß man ein Bild im Brennpunkte des Objectivglases mißt, und daraus auf die scheinbare Größe des Objects schließt: so wird es hinreichend seyn, diese Methode an dem sehr einfachen Kirchischen Schraubenmicrometer zu zeigen:

1) Ein

1.) Ein Ring (Fig. 32.) durch den sich zwey gerade und gleiche Schrauben, deren Spitzen a, b, im Durchmesser des Rings schrauben lassen, sey an einem astronomischen Fernrohr im Brennpunkte des Objectivglases angebracht. Man stelle das Rohr so, daß ein Stern im Aequator in a erscheine, und in einer geraden Linie, bey unverrücktem Rohre, nach b geführet werde. Die Zeit, in welcher solches geschiehet, verwandle man in Bogen des Aequators. Bringt man nun die Spitzen der Schrauben an einander, und zählt die darauf gehenden Schraubengänge: so findet man aus obigem, wie viel vom Bogen des Aequators auf jeden Schraubengang kömmt.

2.) Befindet sich der Stern außerhalb des Aequators, daß seine Declination $= \delta$, das Stück des Parallelkreises ab $= \eta$, und ein der gefundenen Zeit zugehöriger Bogen des Aequators $= \alpha$ sey: so setze man sin. tot : cos. $\delta = \alpha : \eta$, der $\eta = \alpha$. cos. δ; da dann η der Bogen oder Sehewinkel ist, unter welchem jetzt das Object ab erscheint, und nun für den Werth eines Schraubenganges eben so gebraucht wird, wie vorher der Bogen des Aequators.

3) Die Richtigkeit der in (2) gebrauchten Proportion und Gleichung zu beurtheilen, sey

a.) Geogr. §. 10. Fig. 88. mv $= \delta$, Cv $=$ r, dm $= \varrho$; so ist im $\triangle$ Cdm, sin. tot : sin. pm $=$ Cm : dm, oder allgemein sin. tot : cos $\delta =$ r : ϱ.

b) Astr. §. 40. Fig. 72. AM, MS, AD, was in (2) δ, η, α, heißt, und ϱ, r, wie zuvor: so ist r : $\varrho =$ sin. α : sin. η. §. 188. Nun war r : $\varrho =$ sin. tot : cos δ. Folglich sin. tot : cos. $\delta =$ sin. α : sin. $\eta = \alpha : \eta$, weil hier die Winkel sehr klein sind.

4.) Nimmt man cos. δ für den Halbmesser 1 aus den Tafeln: so kann man, weil α hier nicht über 1 Grad beträgt, die letzten 4 Ziffern weglassen, und doch die Secunden finden.

5) Da die Sinus in den 4 ersten Ziffern einige Minuten hindurch unverändert bleiben: so braucht man die Declination δ nicht in der größten Schärfe, sondern nur bis auf ein Paar Minuten genau zu wissen.

6.) Aus der Formel in (2) folgt auch $\alpha = \frac{\eta}{\text{cos. } \delta} = \eta. \text{ sec. } \delta$, wobey für sec. δ die Erinnerung in (4. 5.) gilt.

Anmerkung. Anstatt eines Micrometers braucht man auch ein Fadenkreutz, dessen horizontaler Faden, der Parallelfaden, der verticale aber der Stundenfaden heißt. Man kann auch mehrere Fäden haben.

§. 352. Bedeutet (Astr. Fig. 78.) der Kreis um S einen Himmelskörper, den man für eine Kugel annimmt: so sey sein scheinbarer Halbmesser, für die Erde T, den man mit dem Micrometer mißt, OTS $= \mu$, sein wahrer SO $=$ m, sein Abstand von der Erde ST $=$ d, den man mittelst der Parallaxe findet §. 350. Nun ist TO eine Tangente. Folglich ist r : sin. OTS $=$ TS : SO oder 1 : sin. μ $=$ d : m, folglich m $=$ d. sin. μ (auch d $=$ m. $\frac{1}{\text{sin. } \mu} =$ m. cosec. μ.) Da d aus der Parallaxe p gefunden wird, und d $= \frac{r}{\text{sin. p}}$ §. 348. wenn r den Halbmesser der Erde bedeutet: so ist auch m $= \frac{\text{r. sin. } \mu}{\text{sin. p}}$. Z. E. nach Cassini waren für eine Beob-

achtung

achtung des Mondes, $p = 54' 10''$, und $\mu = 14' 46''$. Setzt man nun $r = 1$:

so ist $\log. \sin. \mu = 7,6330073$

$\log. \sin. p = 8,1974403$

$\log m = 0,4355670 - 1$

folglich $m = 0,27262$. Setzt man mit Hrn. de la Lande den Halbmesser des Aequators $r = 3281013$ Toisen: so ist $\log. r = 6,5160079$

$0,4355670 - 1$

$\log m = 5,9515749$

folglich $m = 8,94489$ Toisen.

Anmerkung. Die älteste Methode (beym Aristarch von Samos) die Weite der Sonne von der Erde zu finden, wenn man die Weite des Mondes kennt, ist: daß man (Astr. Fig. 77.) genau den Augenblick bemerkt, da der Mond in eine Quadratur tritt, da folglich $TLS = R$, und man den Winkel bey T kennet. Denn es ist $\cos. T : r = TL : TS$, folglich $TS = TL. \frac{r}{\cos. T} = TL. \sec. T$. Aristarch setzte $T = 87°$, daher kömmt $TS = TL. 191,07$. Nach Wendelin beym Ricciolus ist $T = 89° 45'$, dies gibt $TS = TL. 229,18385$.

§. 353. Für (Astr. §. 232. Fig. 78.) Ist des Planeten Bahn um die Sonne S ein Kreis: so ist $\sin. tot : \sin. OTS = TS : SO$, d. i. man kann aus der größten Digression des Planeten die Verhältniß der Weiten des Planeten und der Erde von der Sonne finden. Auch kann sich alsdann seine größte Digression nur mit TS ändern. Wäre aber obgedachte Bahn eine andere Curve: so könnte wohl SO und TS kleiner, folglich OTS größer werden.

§. 354. Für (Astr. §. 238, 3. hier Fig. 34.) Unterdeß daß die Erde T und die Sonne S in den

Bogen Tt nach der Ordnung der Zeichen fortrücke, also die Spitze ihres Schattenkegels aus V in v rücke, komme der Mond L aus L nach l (auch in der Ebene der Ecliptik, wie man hier wieder ohne Fehler annehmen kann. (Astr. §. 190.) daß er also, wenn man tr mit TL parallel gemacht, um den Winkel rtl fortrücke, der ohngefehr $= 13 VSv$, weil der Mond in einem Jahre etwa 13 mahl um die Erde kömmt. Nun setze man $rtl > LTV$, daß also $ltv = rtl - rtv$, welches statt findet, wenn ltv einen positiven Werth erhält. Wird nun Tv von tr in dem Punkte s geschnitten: so ist $rtv = rsv - TvS = LTv - TvS = LTV + VTv - TvS = LTV + VSv$. Nun war $rtl = 13 VSv$, und $ltv = rtl - rtv$. Folglich ist $ltv = 13 VSv - LTV - VSv = 12 VSv - LTV$, positiv, wenn $12 VSv > LTV$. Z. E. man setze $LTV = 40'$, die Zeit von T nach t $= 2$ Stunden, folglich VSv etwa $= \frac{1^\circ}{12}$: so ist $ltv = 1^\circ - 40' = 20'$.

§. 355. Für die Gestalt der Erde (Geogr. §. 4.) Daß die Grade der Erdmeridiane nicht einerley Länge haben, ist durch die Messungen (Geogr. §. 14.) dargethan; aber die erste Kenntniß davon hatte schon vorher die Mechanik gewährt. Denn nimmt man die tägliche Umdrehung der Erde um ihre Axe pq (Geogr. Fig. 88. hier Fig. 33.) an: so bekömmt jeder Punkt auf der Oberfläche einen Schwung §. 327, der senkrecht auf die Axe ist, und in Verhältniß des Halbmessers desjenigen Kreises, den er beschreibt, stehet. Z. E. der Schwung in v verhält sich zu dem in m, wie $Cv : dm = Cm : dm = \text{sin. tot} : \text{sin. } pm = \text{sin. tot} : \text{cos. } mv$. Durch diesen Schwung, den die noch weiche oder mit Wasser be-

deckte Erde durch ihr erstes Umdrehen erhielt, mußten sich ihre Theile desto mehr erheben, je näher sie dem Aequator waren, wodurch aus ihr ein an den Polen zusammengedrücktes Sphäroid gebildet ward. Dieser Schwung entfernt auch noch stets den Punkt m vom Mittelpunkt der Erde, und ist der Schwerkraft, die ihn nach diesem Mittelpunkte treibt, zum Theil entgegengesetzt. Wie viel dieses in jeder Breite betrage, findet man auf folgende Art:

Man verlängere Cv, Cm, dm nach b, e, f, Cv : dm = vb : mf, und ziehe fe auf Ce senkrecht; so ist der Schwung vb der Richtung der Schwere gerade entgegengesetzt, und der Schwung mf, in me, fe zerlegt, wovon der Theil me der Richtung der Schwere Cm entgegengesetzt ist, folglich die Schwerkraft in der Verhältniß vb : me vermindert wird. Nun ist wegen Aehnlichkeit der Triangel Cm : dm = mf : me und angenommen Cv : dm = vb : mf. Folglich ist $Cv^2 : dm^2 =$ vb : me.

Hieraus entstehet also auch eine Verminderung des Gewichts der Körper, die im Aequator am größten ist, aber von da an immer mehr abnimmt, daß daher der Körper nur unter dem Pol sein natürliches Gewicht haben kann.

Auch muß ein Pendel §. 325, das unter dem Aequator von der am meisten verminderten Schwerkraft getrieben wird, daselbst am langsamsten gehen, folglich am meisten verkürzt werden, und unter dem Pol am längsten gemacht werden.

Alle diese Schlüsse sind durch häufige Versuche genugsam bestätigt worden. Da sie sich nun auf die Voraussetzung der täglichen Umdrehung der Erde gründen: so wird diese umgekehrt durch die Erfahrung dargethan, und außer allen Zweifel gesetzt.

§. 356. Für (Geogr. §. 5.) ist nach §. 157. $d = \frac{p}{\pi} = \frac{5400}{3,14} = 1719,745$ und nach §. 164. die Oberfläche der Kugel $= dp = \frac{p^2}{\pi} = 5400.$

$1719,745 = 5400^2 . \frac{1}{\pi}$.

§. 357. Für (Geogr. §. 22. Fig. 88.) Es sey des Parallelkreises mrn Breite $mv = \delta$, Halbmesser $dm = \varrho$; $Cd = y$, und $Cm = Cv = r$: so ist sin tot : sin. pm = Cm : dm d. i. 1 : cos. δ = r : ϱ; folglich $\varrho = r. \cos. \delta$; und sin. tot : cos. pm = Cm : Cd d. i. 1 : sin. δ = r : y, folglich $y = r. \sin. \delta$.

Da sich die Umkreise wie die Halbmesser verhalten, folglich wie 1 : cos. δ, so ist, wenn ein Grad des Aequators = 15 Meilen, ein Grad des Parallelkreises = 15. cos. δ Meilen.

§. 358. Für (Geogr. §. 25. Fig. 88.) Aus §. 357. hat man $y = r \sin. \delta$, und aus §. 164. die Zone zwischen Aequator und Parallelkreis mrn, $= y. 2r\pi = 2r^2\pi. \sin. \delta$, oder wenn S die Kugelfläche, $= \frac{1}{2} S. \sin. \delta$.

Da $pd = pC - Cd = r - y = r - r \sin. \delta = (1 - \sin. \delta) r$ §. 357. so ist die Zone um den Pol bis zum Parallelkreis mrn, $= 2r^2\pi (1 - \sin. \delta)$ oder wenn S die Kugelfläche, $= \frac{1}{2} S (1 - \sin. \delta)$.

Nimmt man einen Parallelkreis von geringerer Breite γ: so ist die Zone von da bis zum Aequator, $= \frac{1}{2} S. \sin. \gamma$, folglich die Zone zwischen diesen beyden Parallelkreisen, $= (\sin. \delta - \sin. \gamma) \frac{1}{2} S$.

Der ersten Gründe der allgemeinen Größenberechnung Ende.

Verbesserungen.

(S. 10. Z. 1) bh für bn. (S. 11. und in ähnlichen Stellen) sollten die Exponenten, wie $n - 1$, $2n$, $2n - 1$, $2n - 2$ u. s. w. in einer Reihe seyn; und die Bruchexponeten $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{n}{m}$, $\frac{nm}{n}$, mehr in der Höhe stehen. (S. 12. Z. 7. v. u.) $\sqrt[3]{\frac{12}{4}} = \sqrt[3]{3}$. (S. 16. Z. 9. v. u.) stehen a und b zu hoch. (S. 20. Z. 12. v. u.) wer f. wür. (S. 23. §. 75. Z. 4.) $\frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^2}$ f. $a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$. (S. 27. Z. 2.) 1 : u f. l : u. (S. 32. §. 96. Z. 3.) x f. f. (S. 33. Z. 4. v. u.) $3 - 2$ f. 3. 2. (S. 37. Z. 6. v. u.) β f. d. (S. 41. Z. 2. v. u.) $Z = \frac{(\alpha + \beta\alpha\Phi - \beta\gamma\delta)}{}$ (S. 46. §. 113. Z. 2. v. u.) $\sqrt{\left[\frac{a^2}{4} + a^2\right]}$ (S. 53. §. 134. Z. 3.) für f. Für. (S. 56. Z. 4. v. u.) alle Zähler $r + q$. (S. 57. Z. 6.) abgetragen f. abgewogen. (S. 63. Z. 1.) A. f. F. (S. 70. §. 150. Z. 9. 10.) sind die Worte — und siehet es als ein Element der zugehörigen Größe — auszustreichen. (S. 73. Z. 9.) der Nenner des ersten Bruchs $\frac{1}{2}\alpha$. (S. 74. Z. 3.) der Nenner des Bruchs S. $\frac{1}{n}\alpha$ stehen. (S. 75. Z. 10.) S. $\frac{1}{n}\alpha$ f. S. $\frac{1}{2}\alpha$. (S. 76. Z. 4. v. u.) $= r$ f. $- r$. (S. 82. Z. 10. v. u.) man sich f. sich. (S. 85.) Bey §. 175. muß Erkl. stehen. (S. 90.) num. 3. lese man so, daß auf die 2te Zeile die 4te und 5te, und auf diese die 3te und 6ste folge. (S. 96. §. 203. Z. 3.) $= 1$. (S. 97. §. 204. Z. 5.) sin C f. sin c. (S. 99. Z. 3. v. u.) $b + c - a$ f. $b + c = a$. (S. 101. Z. 6.) b. sin. f. b, sin. (S. 103. §. 211. Z. 5.) sin A^2 f. sin A? (S. 107. Z. 1.)

1.) den f. dem. (S. 113. Z. 7. v. u.) l f. 1. (S. 116. Z. 1. v. u.) 3ter für 3ten. (S. 118. Z. 11. (v. u. mögliche f. ungleiche. (S. 122. Z. 9. v. u.) PM^2 f. $PM,^2$ (S. 123. Z. 3.) c^2 f. a^2. (Z. 11. v. u.) $\mp \frac{1}{2} a$ f. $+ \frac{1}{2} a$. (S. 124. Z. 5. CF^2 f. Cf^2. (§. 266. Z. 2.) ist $\underline{a \mp \surd}$ (Z. 4.) ist = (S. 125. §. 269. Z. 2.) z f. Z. (S. 127. Z. 9. v. u.) αy f. ay (S. 128. Z. 3. wo für f. wofür. (§. 277. Z. 7. $= a$ f. $- a$. (S. 129. Z. 1. ein f. eine. (S. 130. Z. 3. v. u.) $\frac{1}{2} c$ f. ^1c. (S. 131. Z. 4. v. u.) $(a^2 + c^2)$ f. $a^2 + c^2$. (S. 145. Z. 1.) μ f. β. (S. 146. Z. 5. v. u.) Dilatation. (S. 147. Z. 6. v. u.) r = f. = (Z. 3. v. u.) a f. a^n. (S. 148. Z. 17.) ϱ, τ f. e, T. (S. 155. Z. 1.) der f. den. (Z. 11. v. u.) s f. 5. (S. 157. Z. 8.) AB f. AP. (S. 160. Z. 18.) o f. O. (S. 168. Z. 9.) log. $\frac{3}{2}$ f. $\frac{1}{2}$ (S. 171. Z. 8.) $k \rightharpoonup r$ f. $k = r$. (S. 173. Z. 13.) $\alpha - p$ f. $a - p$. (S. 177. §. 349. Z. 11.) sin SAZ : sin SBz f. sin SAz : sin SBx (S. 179. Z. 15. v. u.) oder f. der (S. 1 3. Z. 11.) muß heißen: mache lv : dm.

In der Kupfertafel Fig. 1. muß der Buchstabe B weiter herunter am Kreisbogen stehen.

Verbesserungen
zum Bogen A. der allgemeinen Größenberechnung.

S. 11. §. 36. stehet bey 10^{n-1} die 1 zu hoch; bey 10^{2n} die n zu niedrig. Eben so müßte bey 10^{2n-1} und 10^{2n-2}, was oben ist, in einer Reihe stehen.

S. 11. §. 35. $\frac{1}{3}$, $\frac{n}{m}$, $\frac{nm}{m}$ müßten kleiner seyn und weiter herauf stehen, nämlich so: $A^{\frac{1}{3}}$, $X^{\frac{n}{m}}$, $X^{\frac{nm}{m}}$.

S. 16. §. 51. letzte Zeile, stehen a und b zu hoch, da sie in einer Reihe stehen sollten, nämlich so: $(1+m)\,a$, $(1+m)\,b$.

4.
5.
6.
7
8.
12.
13.
14.
17.
21.
22.
27.
28.
33.
34.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lorenz, Johann Friedrich,

Die ersten Gründe der allgemeinen Größenberechnung

Helmstadt 1792

Math.u. 112
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594102-1
VD18 14496224-001